



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

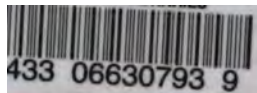
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

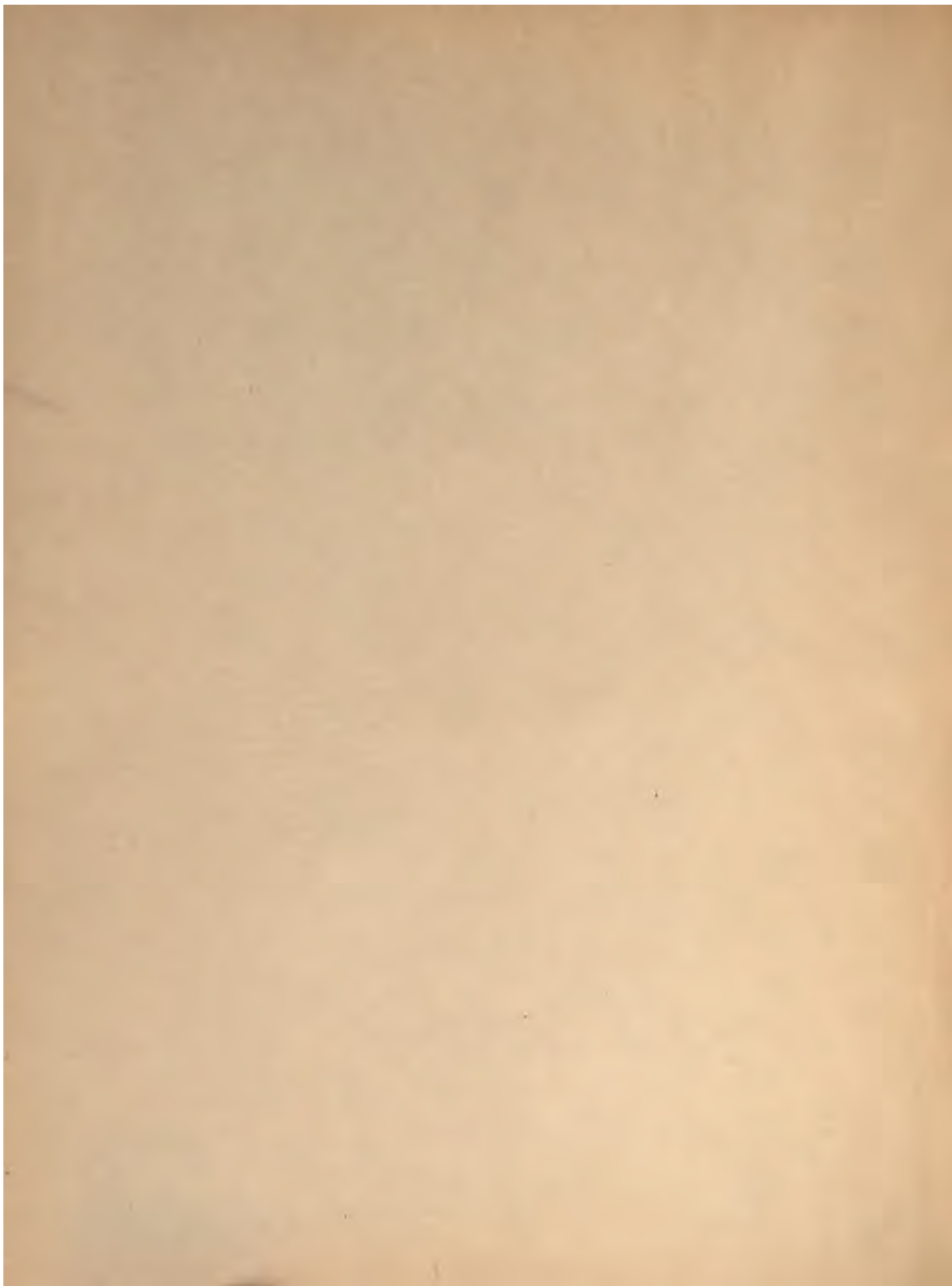
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



433 06630793 9



OEA
FRANCE.
Ecole







ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1869, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES
DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR M. L. PASTEUR,
MEMBRE DE L'INSTITUT,

AVEC
UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

TOME SIXIÈME — ANNÉE 1869.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1869

(L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de traduction.)

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

THE
FEDERAL BUREAU OF INVESTIGATION
DEPARTMENT OF JUSTICE
WASHINGTON, D. C. 20535
JAN 10 1964

ALL INFORMATION CONTAINED
HEREIN IS UNCLASSIFIED
DATE 10/10/01 BY 60322

COMITÉ DE RÉDACTION.

M. PASTEUR, *Président*.

MM.

MATHÉMATIQUES.....	{	BRIOT, HERMITE, PUISEUX.
PHYSIQUE.....		BERTIN.
CHIMIE.....		H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.
HISTOIRE NATURELLE.....	{	DELESSE, DES CLOIZEAUX, LACAZE-DUTHIERS, VAN TIEGHEM.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR DEUX SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. DIDON,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Dans le travail intitulé *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre, etc.*, que j'ai publié récemment dans ce Journal, j'ai indiqué pour chacune des fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$ un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, et résolu le premier de ces systèmes. Je me propose ici de donner la solution complète du second. Chacun de ces systèmes est satisfait par quatre fonctions distinctes, de sorte que, si l'on donne à m et à n toutes les valeurs entières et positives possibles, on obtient huit séries de fonctions.

Il était intéressant de chercher pour chacune de ces séries une fonction génératrice : c'est ce que j'ai fait dans ce qui va suivre. Enfin, j'ai mis sous forme d'intégrales définies la fonction $V_{m,n}$, et aussi les fonctions $\varphi_{m,n}$ et $V_{m,n}$ qui sont associées aux fonctions de deux variables analogues aux polynômes $\sin(n \arccos x)$ et $\cos(n \arccos x)$.

I.

Pour résoudre le système

$$(1) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 U}{dx^2} - xy \frac{d^2 U}{dx dy} + (n-2)x \frac{dU}{dx} \\ \quad - (m+1)y \frac{dU}{dy} + (m+n)(m+1)U = 0, \\ (1-y^2) \frac{d^2 U}{dy^2} - xy \frac{d^2 U}{dx dy} + (m-2)y \frac{dU}{dy} \\ \quad - (n+1)x \frac{dU}{dx} + (m+n)(n+1)U = 0, \end{cases}$$

auquel satisfait la fonction $U_{m,n}$, j'ai employé le système

$$(2) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - xy \frac{d^2 P}{dx dy} + 2(q-1)x \frac{dP}{dx} - y \frac{dP}{dy} + 2qP = 0, \\ (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - xy \frac{d^2 P}{dx dy} + 2(q-1)y \frac{dP}{dy} - x \frac{dP}{dx} + 2qP = 0 \end{cases}$$

tel, qu'en posant $\frac{d^{m+n} P}{dx^m dy^n} = U$, la fonction U satisfasse au système (1).

On a $q = m + n$. Le système (2) admet pour solutions deux polynômes : l'un d'eux est $(x^2 + y^2 - 1)^q$, l'autre peut se représenter par

$$(3) \quad \sum (-1)^{q-1-k-h} \frac{2.4.6 \dots 2k}{1.3.5 \dots (2k+1)} \frac{2.4.6 \dots 2h}{1.3.5 \dots (2h+1)} \frac{(q-1)!}{k! h! (q-1-k-h)!} x^{2k+1} y^{2h+1},$$

où la somme doit s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de h et de k satisfaisant à la condition $h + k \leq q - 1$.

Si l'on remarque que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \alpha d\alpha = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n+1)},$$

on verra que l'expression (3) peut s'écrire

$$\sum (-1)^{q-1-k-h} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} \alpha d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2h+1} \beta d\beta \frac{(q-1)!}{k! h! (q-1-k-h)!} x^{2k+1} y^{2h+1},$$

ou bien

$$\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin \alpha y \sin \beta (x^2 \sin^2 \alpha)^k (y^2 \sin^2 \beta)^h (-1)^{q-1-k-h} \frac{(q-1)!}{k! h! (q-1-k-h)!} d\alpha d\beta,$$

ou enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin \alpha \sin \beta (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1)^{q-1} d\alpha d\beta.$$

La solution correspondante du système (1) sera donc

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{m+n} xy (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1)^{m+n-1}}{dx^m dy^n} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta.$$

La forme de la formule de Lagrange, qui a permis à M. Hermite de mettre la fonction $U_{m,n}$ sous la forme $\frac{1}{m! n! 2^{m+n}} \frac{d^{m+n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{dx^m dy^n}$, donnera immédiatement la somme

$$S = \sum \frac{a^m b^n}{1.2 \dots m.1.2 \dots n \dots 2^{m+n}} \frac{d^{m+n} xy (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1)^{m+n-1}}{dx^m dy^n},$$

car il suffira de faire dans cette formule

$$F = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1, \quad \Phi = \frac{xy}{x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1}.$$

L'intégrale double $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta$ sera la fonction génératrice des polynômes (4).

Pour donner une application de la forme précédente du polynôme (4) que je désignerai par R, je vais en déduire le système (1).

Pour cela, je pose

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^{m+n} xy (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - z^2)^{m+n-1}}{dx^m dy^n} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta.$$

Par le théorème des fonctions homogènes, on aura

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y} = 2 \pi - \nu =: 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \pi \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha}{2^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sin \alpha} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta \\ = \pi - \nu \quad T.$$

On tire de là, après avoir fait $x = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \pi \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha}{2^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sin \alpha} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} \right) = \pi - \nu \quad 3$$

Donc nous aurons

$$S = 2\pi \pi \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha.$$

Par suite

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha \\ = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha \\ = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha$$

Mais négative, donc on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta.$$

On désigne par π l'angle entre deux plans qui se coupent suivant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha$$

On désigne aussi par π l'angle entre deux plans qui se coupent suivant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta d\alpha d\beta = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha = \frac{1}{2} \pi \pi \sin \alpha$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta \frac{d^{m+n+1} S}{dx^{m+1} dy^n} d\alpha d\beta \\ & = 2(m+n-1)x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta \frac{d^{m+n+1} xy(x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1)^{m+n-2}}{dx^{m+1} dy^n} d\alpha d\beta \\ & + 2(m+n-1)(m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \sin \beta \frac{d^{m+n} xy(x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 1)^{m+n-2}}{dx^m dy^n} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

A cause de l'égalité (5) on a donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dx^2} - x \frac{d \left[x \frac{dR}{dx} + y \frac{dR}{dy} - (m+n)R \right]}{dx} \\ - (m+1) \left[x \frac{dR}{dx} + y \frac{dR}{dy} - (m+n)R \right] = 0; \end{aligned}$$

c'est la première équation du système (1); on trouverait de même la seconde.

Jusqu'ici je n'ai considéré que les deux solutions du système (2), qui sont des polynômes; mais il y en a deux autres; l'une de ces dernières est

$$P = (1-x^2)^{\frac{q+1}{2}} (1-x^2-y^2)^q \int_0^y \frac{d\theta}{(1-x^2-\theta^2)^{q+1}}.$$

Je fais $\theta = \sqrt{1-x^2}z$, il vient alors

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{d\theta}{(1-x^2-\theta^2)^{q+1}} &= \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{\sqrt{1-x^2} dz}{(1-x^2)^{q+1} (1-z^2)^{q+1}} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$P = (1-x^2-y^2)^q \int_0^{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}}.$$

Posant $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \xi$, on obtient

$$P = (1-x^2)^q (1-\xi^2)^q \int_0^\xi \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}};$$

mais

$$(1-\xi^2)^q \int_0^\xi \frac{dz}{(1-z^2)^{q+1}} = C \int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)^q}{\xi - z} dz,$$

C désignant une certaine constante; donc on a, en négligeant cette constante,

$$P = \int_{-1}^{+1} \frac{[(1-x^2)(1-z^2)]^q}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z} dz.$$

La solution correspondante du système (1) sera

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{m+n} [(1-x^2)(1-z^2)]^{m+n}}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z} dz.$$

La formule de Lagrange permettra de trouver immédiatement la fonction génératrice des expressions précédentes; il suffira de faire dans cette formule

$$F = (1-x^2)(1-z^2), \quad \psi = \frac{1}{\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - z}$$

et on trouvera la fonction génératrice sous la forme d'une intégrale définie prise entre les limites -1 et $+1$.

II.

Le système d'équations auquel satisfait la fonction $V_{m,n}$ définie par le développement

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}$$

est le suivant

$$(6) \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 V}{dx^2} - xy \frac{d^2 V}{dx dy} - (n+3)x \frac{dV}{dx} + my \frac{dV}{dy} + m(m+n+2)V = 0, \\ (1-y^2) \frac{d^2 V}{dy^2} - xy \frac{d^2 V}{dx dy} - (m+3)y \frac{dV}{dy} + nx \frac{dV}{dx} + n(m+n+2)V = 0. \end{cases}$$

On voit que la solution complète de ce système contiendra quatre constantes arbitraires, et que, par conséquent, il y aura, comme solutions, quatre fonctions distinctes. Pour trouver cette solution complète, je remplace les variables x et y , par d'autres ξ et η , liées aux premières par les relations

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}.$$

Le système (6) se transforme dans le suivant

$$\begin{aligned} (1+\xi^2)(1+\xi^2+\eta^2) \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \xi\eta(1+\xi^2+\eta^2) \frac{d^2 V}{d\xi d\eta} + [(m+2)\eta^2 - n(1+\xi^2)] \xi \frac{dV}{d\xi} \\ + [(m+1)(1+\eta^2) - (n+1)\xi^2] \eta \frac{dV}{d\eta} + m(m+n+2)V = 0. \end{aligned}$$

Je n'écris que l'une des équations de ce système; la seconde s'en déduira par le changement de ξ , η , m , n respectivement en η , ξ , n , m .

Posons ensuite

$$V = V' (1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1},$$

on obtiendra

$$(7) \begin{cases} (1+\xi^2) \frac{d^2 V'}{d\xi^2} + \xi\eta \frac{d^2 V'}{d\xi d\eta} + (2m+n+4)\xi \frac{dV'}{d\xi} \\ \quad + (m+1)\eta \frac{dV'}{d\eta} + (m+1)(m+n+2)V' = 0, \\ (1+\eta^2) \frac{d^2 V'}{d\eta^2} + \xi\eta \frac{d^2 V'}{d\xi d\eta} + (2n+m+4)\eta \frac{dV'}{d\eta} \\ \quad + (n+1)\xi \frac{dV'}{d\xi} + (n+1)(m+n+2)V' = 0. \end{cases}$$

En cherchant un système de la forme

$$\begin{aligned} (1 + \xi^2) \frac{d^2 P}{d\xi^2} + \xi \eta \frac{d^2 P}{d\xi d\eta} + h \xi \frac{dP}{d\xi} + h' \eta \frac{dP}{d\xi} + h'' P &= 0, \\ (1 + \eta^2) \frac{d^2 P}{d\eta^2} + \xi \eta \frac{d^2 P}{d\xi d\eta} + k \xi \frac{dP}{d\xi} + k' \eta \frac{dP}{d\eta} + k'' P &= 0, \end{aligned}$$

tel, qu'en posant $\frac{d^{m+n} P}{d\xi^m d\eta^n} = V'$, cette fonction V' satisfasse au système (7), on trouvera le système suivant

$$\begin{aligned} (1 + \xi^2) \frac{d^2 P}{d\xi^2} + \xi \eta \frac{d^2 P}{d\xi d\eta} + 4\xi \frac{dP}{d\xi} + \eta \frac{dP}{d\eta} + 2P &= 0, \\ (1 + \eta^2) \frac{d^2 P}{d\eta^2} + \xi \eta \frac{d^2 P}{d\xi d\eta} + 4\eta \frac{dP}{d\eta} + \xi \frac{dP}{d\xi} + 2P &= 0; \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d \left[(1 + \xi^2) \frac{dP}{d\xi} + \xi \eta \frac{dP}{d\eta} + 2\xi P \right]}{d\xi} &= 0, \\ \frac{d \left[(1 + \eta^2) \frac{dP}{d\eta} + \xi \eta \frac{dP}{d\xi} + 2\eta P \right]}{d\eta} &= 0; \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (1 + \xi^2) \frac{dP}{d\xi} + \xi \eta \frac{dP}{d\eta} + 2\xi P &= \varphi(\eta), \\ (1 + \eta^2) \frac{dP}{d\eta} + \xi \eta \frac{dP}{d\xi} + 2\eta P &= \psi(\xi). \end{aligned}$$

Rien de plus facile que de déterminer les fonctions φ et ψ .

Le système précédent d'équations est, en effet, équivalent au suivant

$$(8) \quad \begin{cases} (1 + \xi^2 + \eta^2) \frac{dP}{d\xi} + 2\xi P = (1 + \eta^2) \varphi(\eta) - \xi \eta \psi(\xi), \\ (1 + \xi^2 + \eta^2) \frac{dP}{d\eta} + 2\eta P = (1 + \xi^2) \psi(\xi) - \xi \eta \varphi(\eta). \end{cases}$$

En différenciant la première de ces équations par rapport à η , la

seconde par rapport à ξ et retranchant les résultats, on obtient

$$(1 + \eta^2) \varphi'(\eta) + 3\eta \varphi(\eta) = (1 + \xi^2) \psi'(\xi) + 3\xi \psi(\xi).$$

Chacun des membres de cette égalité est donc égal à une constante A, ce qui donne

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \frac{A}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2} d\xi + \frac{B}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \varphi(\eta) &= \frac{A}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\eta \sqrt{1 + \eta^2} d\eta + \frac{C}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (8), on tirera de la première de ces équations

$$\begin{aligned} P = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} & \left\{ \pi(\eta) + \frac{A\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} \int_0^\eta \sqrt{1 + \eta^2} d\eta + \frac{C\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right. \\ & \left. - A\eta \int_0^\xi \left[\frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2} d\xi \right] d\xi - B\eta \int_0^\xi \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{aligned}$$

et de la seconde

$$\begin{aligned} P = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} & \left\{ \chi(\xi) + \frac{A\eta}{\sqrt{1 + \xi^2}} \int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2} d\xi + \frac{B\eta}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right. \\ & \left. - A\xi \int_0^\eta \left[\frac{\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\eta \sqrt{1 + \eta^2} d\eta \right] d\eta - C\xi \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

En égalant ces deux valeurs, et divisant par $(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned} \pi(\eta) - A\eta \int_0^\xi \left[\frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2} d\xi \right] d\xi - \frac{A\eta}{\sqrt{1 + \xi^2}} \int_0^\xi \sqrt{1 + \xi^2} d\xi + A\xi\eta \\ = \chi(\xi) - A\xi \int_0^\eta \left[\frac{\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\eta \sqrt{1 + \eta^2} d\eta \right] d\eta - \frac{A\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} \int_0^\eta \sqrt{1 + \eta^2} d\eta + A\xi\eta. \end{aligned}$$

Mais le premier membre est une simple fonction de η , le second une simple fonction de ξ ; donc chacun de ces membres est égal à une

constante D. Donc finalement, on a

$$P = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} \left\{ D + \frac{C\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} + \frac{B\eta}{\sqrt{1 + \xi^2}} + \frac{A}{2} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} \log(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) + \frac{\eta}{\sqrt{1 + \xi^2}} \log(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}) \right] \right\}.$$

C'est l'expression $(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$ qui conduit au polynôme $V_{m,n}$ comme solution du système d'équations (6). Je l'avais déjà du reste démontré *à priori*.

Considérons maintenant la solution

$$(9) \quad (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

du système (8), soit

$$\frac{1}{12 \dots m \ 12 \dots n} \frac{d^{m+n} \left[(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right]}{d\xi^m d\eta^n} = Q_{m,n}.$$

on a

$$[1 + (\xi + a)^2 + (\eta + b)^2]^{-1} \frac{\xi + a}{\sqrt{1 + (\eta + b)^2}} = \sum a^m b^n Q_{m,n}.$$

Remplaçons a et b respectivement par $a\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}$ et $b\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}$, il vient

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2 \frac{a\xi + b\eta}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} + a^2 + b^2 \right)^{-1} \frac{\xi + a\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \eta^2 + 2b\eta\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} + b^2(1 + \xi^2 + \eta^2)}} \\ &= \sum a^m b^n (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} Q_{m,n}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue maintenant aux variables ξ et η les variables x et y , liées aux premières par les relations

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}, \quad y = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}},$$

le premier membre de l'équation précédente devient

$$(1 + 2ax + 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{x + a}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 + (y + b)^2}}.$$

Par conséquent, la fonction génératrice des solutions du système (6), qui correspondent aux solutions (9) du système (8), et que je représenterai par $R_{m,n}$ est

$$\begin{aligned} & (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{x - a}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 + (y - b)^2}} \\ &= (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{x - a}{\sqrt{1 - x^2 - 2by + b^2}}. \end{aligned}$$

On verra de même que les fonctions génératrices des deux autres solutions du système (6) sont

$$\begin{aligned} & (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{y - b}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 + (x - a)^2}} \\ &= (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{y - b}{\sqrt{1 - y^2 - 2ax + a^2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{x - a}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 + (y - b)^2}} \log \frac{y - b + \sqrt{1 - x^2 - y^2 + (y - b)^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ &+ \frac{y - b}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 + (x - a)^2}} \log \frac{x - a + \sqrt{1 - x^2 - y^2 + (x - a)^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

La composition de la fonction $R_{m,n}$ offre de l'intérêt.

On a

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} \frac{x - a}{\sqrt{1 - x^2 - 2by + b^2}} = \sum a^m b^n R_{m,n}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - 2by + b^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 - 2 \frac{b}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{b^2}{1 - x^2}} \\ &= \sum \frac{b^n}{(\sqrt{1 - x^2})^{n+1}} (X_n), \end{aligned}$$

(X_n) désignant ce que devient la fonction X_n de Legendre, lorsqu'on y

remplace x par $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$. Par conséquent

$$\frac{x-a}{\sqrt{1-x^2}-2by+b^2} = \sum b^n \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} (X_n) - \sum \frac{ab^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} (X_n).$$

Donc

$$\sum a^n b^n R_{m,n} = \left(\sum a^n b^n V_{m,n} \right) \left[\sum \frac{xb^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} (X_n) - \sum \frac{ab^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} (X_n) \right],$$

et

$$\begin{aligned} R_{m,n} = & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} V_{m,n}(X_0) + \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^2} V_{m,n-1}(X_1) + \dots \\ & + \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} V_{m,0}(X_n) \\ & - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} V_{m-1,n}(X_0) - \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2} V_{m-1,n-1}(X_1) - \dots \\ & - \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}} V_{m-1,0}(X_n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$R_{m,n} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(X_{n-k})}{(\sqrt{1-x^2})^{n-k+1}} (x V_{m,k} - V_{m-1,k}).$$

Cette formule montre bien clairement que $R_{m,n}$ est de la forme $\frac{P}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$, P étant un polynôme entier et rationnel en x et y , du degré n en y , et dont les puissances de y ont des indices de même parité que n . Il est bien facile de former le système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfait le polynôme P ; ce système n'offre rien de simple.

Mais considérons la fonction $R_{m,n}$ sous le point de vue exprimé par l'égalité suivante

$$R_{m,n} = \sum X_{n-2h} y^{n-2h},$$

où X_{n-2h} désigne une fonction de x , qui n'est pas la fonction X_{n-2h} de Legendre. En substituant dans le système (6) cette valeur de $R_{m,n}$, et

égalant à zéro les coefficients de y^{n-2h} dans les deux équations, on aura

$$(10) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 X_{n-2h}}{dx^2} - (2n+3-2h)x \frac{dX_{n-2h}}{dx} \\ \quad + m(m+2n-2h+2)X_{n-2h} = 0, \\ (n-2h+2)(n-2h+1)X_{n-2h+2} + 2hx \frac{dX_{n-2h}}{dx} \\ \quad + 2h(m+2n-2h+2)X_{n-2h} = 0. \end{cases}$$

La première des équations (10) donne

$$X_{n-2h} = A_{n-2h} \frac{d^{m+2n+1-2h}(1-x^2)^{m+n+\frac{1}{2}-h}}{dx^{m+2n+1-2h}},$$

la seconde permettra de trouver une relation entre les constantes A_{n-2h} et A_{n-2h+2} .

Par un calcul facile, on trouvera

$$A_{n-2h} = A_{n-2h+2} \frac{2m+2n+3-2h}{2h} (n-2h+2)(n-2h+1).$$

Si donc on suppose $A_n = 1$, il viendra

$$A_{n-2h} = \frac{(2m+2n+1)(2m+2n-1)\dots(2m+2n+3-2h)}{2^h \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots h} \\ \times n(n-1)(n-2)\dots(n-2h+1).$$

Ces fonctions X_{n-2h} jouissent d'une propriété curieuse. On reconnaîtra immédiatement, en différentiant $m+1$ fois la première des équations (10), que

$$\frac{d^{m+1} X_{n-2h}}{dx^{m+1}} = \frac{C}{(1-x^2)^{m+n+\frac{3}{2}-h}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{d^{m+n+1} R_{m,n}}{dx^{m+1} dy^n} = \frac{k}{(1-x^2)^{m+n+\frac{3}{2}}},$$

k étant une constante.

En résumé, on voit que le système (6) n'admet qu'une seule solution qui soit un polynôme entier et rationnel en x et en y , c'est la fonction

tion $V_{m,n}$ que le système (6) caractérise par conséquent, si l'on ne considère que les solutions du système qui soient des polynômes. Ce système permettra même d'en déterminer très-facilement les coefficients, et l'on trouvera

$$V_{m,n} = \sum (-1)^{k+h} \frac{x^{m-2h} y^{n-2k}}{4^{k+h}} \frac{m(m-1)\dots(m-2h+1)}{h!} \\ \times \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{k!} \frac{1}{(m+n)\dots(m+n-h-k+1)}.$$

Il est à remarquer que l'on a

$$V_{m,n} = \frac{d^{n+m} Q}{dx^n dy^m},$$

Q étant un polynôme qui est le même tant que la somme $m+n$ ne change pas. Cette propriété, qui rapproche les deux fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, résulte immédiatement de ce que le système d'équations

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - xy \frac{d^2 P}{dx dy} + (q-3)x \frac{dP}{dx} + qy \frac{dP}{dy} + 2qP = 0, \\ (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - xy \frac{d^2 P}{dx dy} + (q-3)y \frac{dP}{dy} + qx \frac{dP}{dx} + 2qP = 0,$$

où $q = m+n$, différentié n fois par rapport à x et n fois par rapport à y , reproduit le système (6), si l'on pose $\frac{d^{n+m} P}{dx^n dy^n} = V$. On a

$$Q = \sum (-1)^{k+h} \frac{x^{q-2h} y^{q-2k}}{4^{k+h}} \frac{q(q-1)\dots(q-2h+1) q(q-1)\dots(q-2k+1)}{h! k! q(q-1)\dots(q-h-k+1)}.$$

III.

Quand dans le polynôme $V_{m,n}$ on remplace x et y par $\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$ et $\frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$, ce polynôme se transforme dans l'expression suivante

$$\frac{(-1)^{m+n}}{m! n!} (1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} \frac{d^{m+n} (1+\xi^2+\eta^2)^{-1}}{d\xi^m d\eta^n}.$$

Cette propriété va nous permettre de mettre $V_{m,n}$ sous la forme d'une intégrale double. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
 (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} &= \sum \frac{(-1)^{m+n} (m+n)!}{m! n!} \xi^{2m} \eta^{2n} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum (2m+2n+1) \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n+1)} \frac{(2m+2n)!}{(2m)!(2n)!} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} (i\xi \cos \alpha)^{2m} (i\eta \sin \alpha)^{2n} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum (2m+2n+1) \frac{(2m+2n)!}{(2m)!(2n)!} \\
 &\quad \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2n+1} \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} (i\xi \cos \alpha)^{2m} (i\eta \sin \alpha)^{2n} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Comme l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x dx$ est nulle, si les nombres m et n ne sont pas tous deux pairs, on en conclut qu'on peut mettre l'expression $(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}$ sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \sum (p+1) [i \sin \varphi (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha)]^p.$$

Par conséquent, on a

$$(11) \quad (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi [1 - i \sin \varphi (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha)]^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^{m+n} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1}}{d\xi^m d\eta^n} \\
 &= \frac{(m+n+1)! i^{m+n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{m+n+1} \varphi \cos^m \alpha \sin^n \alpha}{[1 - i \sin \varphi (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha)]^{m+n+1}}.
 \end{aligned}$$

Mais

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad 1 + \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2},$$

donc

$$V_{m,n} = - \frac{(m+n+1)!}{m! n! 2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \\ \times \frac{\sin^{m+n} \varphi \cos^m \alpha \sin^n \alpha}{[\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)]^{m+n+2}}.$$

Comme vérification, cherchons d'après cette dernière formule $\sum a^m b^n V_{m,n}$. Cette somme est égale à

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi}{[\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)]^2} \\ \times \sum (m+n+1) \left[\frac{\sin \varphi (a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{[\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)]} \right]^{m+n},$$

c'est-à-dire à

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi}{[\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)]^2} \\ \times \frac{1}{\left[1 - \frac{\sin \varphi (a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{[\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)]} \right]^2},$$

ou enfin à

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\{\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sin \varphi [(x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha]\}^2}.$$

En vertu de la formule (11), l'expression précédente se transforme en la suivante

$$- \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \left(1 + \frac{(x-a)^2}{1-x^2-y^2} + \frac{(y-b)^2}{1-x^2-y^2} \right)^{-1},$$

qui est égale à $(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}$.

Les fonctions $V_{m,n}$ et $\mathcal{V}_{m,n}$, qui sont associées aux fonctions $U_{m,n}$ et $\mathcal{U}_{m,n}$ analogues à $\cos(n \arccos x)$ et $\sin(n \arccos x)$ se mettent sous une forme plus simple que la fonction $V_{m,n}$, car on peut les représenter par une intégrale définie simple.

On a

$$(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \alpha^n b^n V_{m,n},$$

et on reconnaitra facilement que par la substitution $x = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$,
 $y = \frac{\eta}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$, $V_{m,n}$ se transforme en

$$\frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} (1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{m+n}{2}+1} \frac{d^{m+n}(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}}{d\xi^m d\eta^n}.$$

L'égalité

$$(12) \quad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A+iB\cos\alpha+iC\sin\alpha},$$

devient, quand on y fait $A=1$, $B=\xi$, $C=\eta$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1+i\xi\cos\alpha+i\eta\sin\alpha}.$$

On déduira de cette formule, par un calcul analogue à celui qui a été fait pour la formule $V_{m,n}$,

$$V_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^m\alpha \sin^n\alpha d\alpha}{(\sqrt{x^2+y^2-1+x\cos\alpha+y\sin\alpha})^{m+n+1}}.$$

Pour transformer de la même manière la fonction $\Psi_{m,n}$, il faudrait trouver une égalité semblable à (12) et donnant $\frac{1}{(\sqrt{1+\xi^2+\eta^2})^3}$.

Or, si l'on différentie par rapport à A cette égalité (12), et qu'on remplace ensuite A , B et C respectivement par 1, ξ et η , on obtiendra

$$\frac{1}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(1+i\xi\cos\alpha+i\eta\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas où $m+n$ est un grand nombre, on peut trouver une intégrale simple qui représente approximativement la fonction $V_{m,n}$.

Cette intégrale simple est très-analogue à l'intégrale simple qui représente $V_{m,n}$; de sorte qu'on aura quelque chose d'équivalent au théorème de Laplace qui ramène approximativement, dans le cas où n est grand, la fonction X_n de Legendre à un cosinus.

En appliquant la méthode que Laplace a donnée dans son calcul des probabilités, on représente d'une manière approchée l'intégrale

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^k \varphi d\varphi}{(A + B \sin \varphi)^{t+1}}$, dans le cas où k est un grand nombre, par

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}} \frac{1}{\sqrt{A} (A + B)^{t+\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent $V_{m,n}$, quand $m + n$ est grand, par

$$-\frac{(m+n+1)!}{m!n!2\sqrt{m+n+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\frac{1}{4}}} \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{\cos^m \alpha \sin^n \alpha}{(\sqrt{x^2+y^2-1} + x \cos \alpha + y \sin \alpha)^{m+n+\frac{3}{2}}} d\alpha.$$

J'indiquerai encore un autre rapprochement entre X_n et $U_{m,n}$. On peut se proposer de chercher, parmi tous les polynômes

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n$$

du degré n , qui ont l'unité pour coefficient du terme en x^n , quel est celui qui rend minimum l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} f^2(x) dx$. Ce polynôme pourra être considéré comme étant celui qui s'approche le plus de zéro entre les limites -1 et $+1$. Pour en déterminer les coefficients A_1, A_2, \dots, A_n , on égalera à zéro les dérivées de l'intégrale relatives à ces quantités, ce qui donnera les équations

$$\int_{-1}^{+1} f(x) x^{n-1} dx = 0, \dots, \int_{-1}^{+1} f(x) x^{n-2} dx = 0, \dots, \int_{-1}^{+1} f(x) dx = 0.$$

On en conclut immédiatement

$$f(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2) \dots 2n} X_n.$$

Cherchons de même, parmi tous les polynômes $\varphi(x, y)$, du degré $m + n$, ayant l'unité pour coefficient du terme en $x^m y^n$, celui qui rend minimum l'intégrale $\iint \varphi^2(x, y) dx dy$, où les variables satisfont à la condition $x^2 + y^2 \leq 1$. On trouve les équations

$$\begin{aligned} \iint \varphi(x, y) x^{m+n} dx dy &= 0, \dots, & \iint \varphi(x, y) x^{m+1} y^{n-1} dx dy &= 0, \dots, \\ \iint \varphi(x, y) x^{m-1} y^{n+1} dx dy &= 0, \dots, & \iint \varphi(x, y) x^p y^q dx dy &= 0, \dots, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(x, y) = \frac{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots n \cdot 2^{m+n}}{(m+1)(m+2) \dots 2m(n+1)(n+2) \dots 2n} \frac{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 2 \dots (m+n)} U_{m,n}.$$



RECHERCHES

POUR SERVIR A L'HISTOIRE PHYSIOLOGIQUE

DES MUCÉDINÉES.

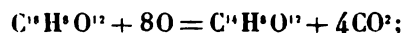
FERMENTATION GALLIQUE,

PAR PH. VAN TIEGHEM,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Scheele obtint pour la première fois l'acide gallique, en 1786, par le pourrissage des noix de galle à l'air libre, et c'est encore de cette manière qu'on le prépare aujourd'hui dans l'industrie. Dans la pensée de Scheele, l'acide existe tout formé dans la noix ; le pourrissage, en détruisant les matières qui en masquent les propriétés, ne fait que le mettre en évidence. M. Pelouze a montré, au contraire, en 1833, que l'acide gallique ne préexiste pas, mais qu'il résulte de la transformation lente du tannin au contact de l'air, et depuis lors les opinions les plus diverses ont été émises tant sur la cause prochaine que sur les produits de cette métamorphose.

Cause prochaine du phénomène. — Pour M. Pelouze, c'est en absorbant directement l'oxygène de l'air et en le remplaçant par un volume égal d'acide carbonique, c'est-à-dire en perdant par combustion directe une partie de son carbone, que le tannin se convertit en acide gallique :



à l'abri de l'air, la dissolution se conserve indéfiniment (1). C'est encore pour M. Liebig une combustion lente (ërémacausie), mais elle est indirecte et porte d'abord sur le ligneux pour se communiquer ensuite par entraînement au tannin (2).

Sans nier l'oxydation du tannin dans sa dissolution aqueuse, Robiquet, ayant remarqué que, dans l'infusion de noix de galle, la transformation peut s'opérer en vase clos, croyait « à la présence de principes qui facilitent la réaction, et servent pour ainsi dire de *ferment* » (3). M. Laroque confirma bientôt cette idée, en montrant que les substances qui s'opposent d'ordinaire aux fermentations alcoolique et putride arrêtent aussi la conversion du tannin en acide gallique; pour lui, comme pour Robiquet, le ferment se trouve dans le résidu de la noix de galle épuisée par l'éther, ce qui ne l'empêche ni d'attribuer en même temps à la levûre de bière, à la chair musculaire, au sang, à la matière caséuse, le pouvoir de détruire le tannin; ni d'admettre encore, à l'exemple de Robiquet, que la transformation peut s'accomplir aussi, quoique plus lentement, par oxydation directe, comme l'avait avancé M. Pelouze (4). Aussi, après avoir rendu compte de ces expériences si peu précises, M. Dumas ajoute-t-il : « Ces observations rendent sans doute fort vraisemblable l'existence d'une fermentation gallique; mais avant de l'admettre, il conviendrait d'étudier l'action que l'eau exerce sur la noix de galle épuisée par l'éther, et d'essayer d'isoler ainsi le ferment qu'elle doit contenir (5). » C'est ce qu'a tenté plus récemment M. Ed. Robiquet. Reprenant l'idée émise par son père et appuyée par les expériences de M. Laroque, il essaye de la préciser davantage en établissant que c'est la pectase contenue dans la noix de galle, et dont une partie se retrouve dans le tannin du commerce où elle a été entraî-

(1) PELOUZE, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. LIV, p. 337; 1833.

(2) LIEBIG, *Revue scientifique*, juin 1840. Plus tard, M. Liebig a admis à son tour l'idée de fermentation : « Outre le tannin, dit-il, l'extrait de noix de galle renferme une substance particulière qui se décompose au contact de l'eau et sous l'influence de laquelle le tannin éprouve une métamorphose semblable. » (*Lettres sur la Chimie*, p. 137; 1847.)

(3) ROBQUET, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. LXIV, p. 385; 1837.

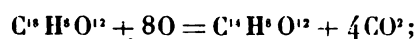
(4) LAROQUE, *Journal de Pharmacie*, 1^{re} série, t. XXVII, p. 197; 1841.

(5) DUMAS, *Traité de Chimie*, t. VI, p. 372; 1843. Et à la page précédente : « Le changement qui s'opère semble bien se rattacher aux fermentations proprement dites, mais jusqu'ici les preuves qu'on en a données ne sont peut-être pas satisfaisantes. »

née par l'éther qui sert à la préparation de ce corps, qui est le principe actif, et qu'ainsi « la fermentation gallique se confond avec la fermentation pectique » (1).

Oxydation lente et action d'un ferment soluble préexistant, telles sont donc, en résumé, les deux causes dont le jeu tantôt isolé, tantôt simultané, produirait, dans les idées reçues, la métamorphose du tannin.

Produits qui en résultent (2). — Dans l'opinion de M. Pelouze, le tannin, en perdant par combustion lente quatre équivalents de carbone, devient purement et simplement de l'acide gallique :

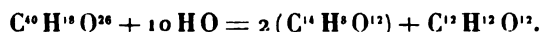


mais alors la différence entre le poids du tannin détruit et celui de l'acide gallique formé ne doit pas excéder 11,3 pour 100. Or, on avait remarqué depuis longtemps que l'acide obtenu par le procédé de Scheele ne dépassait pas la moitié du tannin transformé; on avait donc pensé qu'il devait se produire en même temps que l'acide gallique une autre substance, qui entrerait avec lui dans la constitution du tannin. Émise d'abord par M. Chevreul, appuyée par Pelletier et par Robiquet, cette idée fut précisée davantage par M. Liebig. Ce chimiste, après avoir montré que l'ébullition avec l'acide sulfurique ou la potasse change le tannin en acide gallique, et avoir cherché vainement dans la liqueur l'acide acétique, qui, d'après Robiquet, pouvait bien être le principe inconnu, remarque qu'en triplant la formule de cet acide on aurait pour second terme le sucre de raisin; « que trois atomes de tannin renferment les éléments de six atomes d'acide gallique et d'un atome de

(1) ED. ROBIQUET, *Journal de Pharmacie*, 3^e série, t. XXIII, p. 241; 1853, et *Thèse*, février 1854.

(2) Si, dans tout le cours de ce travail, je passe sous silence l'acide ellagique que M. Chevreul d'abord, puis Braconnot et tous les autres chimistes ont vu se former constamment pendant l'altération de l'infusion de noix de galle, c'est que je me suis assuré que la production de ce corps n'a aucun lien avec le dédoublement du tannin; il suffira, pour le prouver, de dire que si l'on fait bouillir l'infusion limpide de noix de galle dans un ballon à col étiré que l'on ferme à la lampe, les cristaux d'acide ellagique se déposent, après quelques jours, tout aussi bien que dans les liqueurs qui fermentent. C'est donc à une tout autre cause qu'est due cette formation, et ce n'est pas ici le lieu d'y insister.

sucré de raisin » (1); mais il n'arrive pas cependant à constater la formation réelle de ce corps. C'est à M. Strecker (2) qu'il était réservé d'apporter à cette idée ancienne la sanction expérimentale, en montrant qu'en effet dans l'expérience de Liebig convenablement réalisée, il se produit à la fois de l'acide gallique et du glucose, et que le dédoublement du tannin a lieu avec fixation des éléments de l'eau suivant l'équation



Ce résultat important, rapproché de cette autre circonstance bien connue depuis Braconnot (1818), qu'il se dégage parfois de l'alcool et de l'acide carbonique dans le pourrissage des noix de galle, pouvait porter à croire qu'un dédoublement identique s'opère dans la transformation spontanée du tannin. Toutefois M. Ed. Robiquet, dont le travail est postérieur à celui de M. Strecker, après avoir examiné cette question, se croit autorisé à conclure de ses expériences, qu'en définitive il ne se forme pas de glucose dans cette fermentation; « le tannin, dit-il, ne contient donc pas de sucre et n'est converti en acide gallique que par une simple hydratation » (3).

J'ai pensé qu'en présence d'opinions aussi divergentes, appuyées sur des faits en apparence contradictoires, et en tenant compte des progrès considérables que les travaux de M. Pasteur ont fait faire depuis l'année 1856 à l'étude des fermentations, il y avait lieu d'entreprendre un examen approfondi de ce phénomène, et j'en expose ici les principaux résultats.

I. — *Le tannin ne se transforme pas à l'abri de l'air.*

Introduisons une dissolution aqueuse de tannin ou une infusion filtrée de noix de galle dans une série de flacons que le liquide remplit jusqu'au col; soumettons ces flacons au vide pendant vingt-quatre

(1) LIEBIG, *Chimie organique*, p. 15.

(2) *Quarterly Journal of the Chemical Society*, t. V, p. 102; 1852.

(3) *Journal de Pharmacie*, 3^e série, t. XVI, p. 31; 1854.

heures pour en éliminer l'air dissous; faisons-y entrer de l'acide carbonique ou tout autre gaz inerte qui sature les liqueurs, et après les avoir soigneusement fermés avec des bouchons exposés eux-mêmes à l'action du vide et à la rentrée du gaz inerte, placons-les à l'étuve chauffée à 35 degrés, en ayant soin, quand ils en auront pris la température, de luter les bouchons à la cire. Ainsi préparés, tous ces liquides, quel qu'en soit le degré de concentration, se conserveront indéfiniment. J'en possède une série préparée le 9 août 1867, où le tannin n'a subi depuis neuf mois aucune transformation.

Quand on prend soin, comme nous venons de le faire, d'exclure de la dissolution toute trace d'oxygène, la conservation en est désormais, et par cela seul, assurée. Mais ces précautions ne sont pas toujours indispensables, et il n'est pas rare de voir une dissolution de tannin ou une infusion filtrée de noix de galle, introduite purement et simplement dans un flacon entièrement rempli et bouché avec soin, se conserver indéfiniment sans altération. C'est ainsi qu'une dissolution de 30 grammes de tannin dans 600 centimètres cubes d'eau, mise à l'étuve le 7 août 1867 dans un flacon exactement rempli et bien bouché, est encore aujourd'hui, après neuf mois, inaltérée; il en est de même d'une infusion de noix de galle placée à l'étuve dans les mêmes conditions le 5 août. M. Pelouze a conservé d'ailleurs une dissolution de tannin pendant plus de sept mois à l'abri de l'air sans qu'elle donnât d'acide gallique, et, longtemps avant lui, M. Chevreul avait vu une infusion de noix de galle rester inaltérée au bout de trois ans dans un flacon bouché. Robiquet objectait, il est vrai, que si ces liquides se conservaient, c'est qu'ils étaient trop concentrés; mais les dissolutions que j'ai soumises à l'expérience contenaient les proportions de tannin les plus diverses, et je montrerai plus loin que la transformation s'opère facilement dans les liquides les plus concentrés.

Mais si, dans les conditions précédentes, la conservation peut avoir lieu, elle n'est plus certaine : à côté de flacons qui restent inaltérés, on en voit où le tannin disparaît lentement; en général, parvenue à un certain degré, la transformation s'arrête, mais quelquefois elle peut continuer et devenir complète après un temps fort long. Nous saurons tout à l'heure la raison de ces différences; elles nous montrent qu'il est nécessaire, si l'on veut mettre, dans tous les cas, le tannin dissous

à l'abri de toute atteinte, d'enlever rigoureusement non-seulement le contact de l'air extérieur, mais encore tout l'oxygène dissous.

Il résulte de ces expériences, où les liqueurs n'ont point été chauffées, que la transformation du tannin, quand elle s'opère, n'est pas due à l'action d'un ferment soluble, pectase ou autre, préexistant dans la noix de galle et entraîné avec le tannin, comme l'ont pensé Robiquet et M. Laroque, et comme M. Ed. Robiquet a essayé de le démontrer. Nous pouvons donc désormais, sans crainte de détruire la cause prochaine du phénomène, porter nos liquides à l'ébullition.

II. — *Le tannin ne se transforme pas au seul contact de l'air.*

Introduisons une dissolution de tannin ou une infusion filtrée de noix de galle dans une série de ballons à col ouvert et recourbé suivant le procédé de M. Pasteur; après avoir fait bouillir le liquide pendant quelques minutes, plaçons les ballons dans un lieu tranquille, à une température d'environ 25 degrés; le tannin s'y conservera indéfiniment. Je possède des dissolutions et des infusions de concentration diverse, préparées dans ce but le 24 avril 1864, et dans lesquelles le tannin, après un séjour de plus de quatre ans au libre contact de l'air, est inaltéré comme au premier jour.

On réalise encore avec certitude cette conservation du tannin à l'air libre, en ajoutant tout simplement au liquide quelques gouttes de créosote ou d'une dissolution d'acide phénique (1).

Enfin, sans employer aucune précaution, il arrive quelquefois qu'une dissolution de tannin non chauffée, introduite dans un flacon bouché qu'elle remplit à moitié, se conserve inaltérée, tandis que, dans l'immense majorité des cas, la transformation s'opère dans ces conditions;

(1) L'acide phénique passe pour un antiseptique universel; il y a pourtant des organismes dont il est impuissant à empêcher le développement. Nous devons à M. le Dr Kühne, de Berlin, cette observation intéressante que, dans l'urine, et, en général, dans toutes les dissolutions d'urée, l'acide phénique ne s'oppose nullement au développement de la petite torulacée que j'ai démontré être le ferment de l'urée (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. I, 1864), ni à la fermentation ammoniacale qui est la conséquence de ce développement.

ainsi, le 14 octobre 1867, j'introduis dans un flacon de 200 centimètres cubes 100 centimètres cubes d'infusion de noix de galle, je bouche et je mets à l'étuve; le liquide est encore aujourd'hui, après sept mois, inaltéré. Bien mieux, le 10 août 1867, j'introduis dans un ballon à large col 200 centimètres cubes d'une dissolution contenant 18^{gr},62 de tannin, je fais bouillir quelques minutes, et j'abandonne le ballon à l'étuve sans le boucher. Le 8 octobre, après deux mois de séjour à l'étuve, il ne s'est pas formé trace d'acide gallique, et le liquide évaporé donne un résidu de tannin pur qui pèse 18^{gr},59. Mais la réussite de ces expériences dépend de conditions que nous apprendrons tout à l'heure à connaître et qui ne sont qu'exceptionnellement réalisées.

Il est donc établi que le tannin ne se change pas en acide gallique par une oxydation lente, comme le croyaient MM. Pelouze et Liebig, et comme on continue encore à l'admettre aujourd'hui, sans préjudice du ferment soluble dont nous avons démontré l'existence purement imaginaire.

Mais s'il n'y a ni action d'un ferment soluble, ni oxydation lente, si l'oxygène de l'air est nécessaire à la transformation du tannin, et s'il ne suffit pas à la produire, quelle en est donc la cause prochaine?

III. — *Pour que le tannin se transforme il faut, et il suffit, qu'un mycélium de Mucédinée se développe dans sa dissolution.*

Deux champignons apparaissent naturellement, tantôt tous deux ensemble, tantôt isolément, dans les dissolutions de tannin abandonnées à l'air, toutes les fois qu'il s'y forme de l'acide gallique; il s'agit d'en semer les spores et d'en suivre le développement: ce sont le *Penicillium glaucum* et un *Aspergillus* à spores hérissées, voisin par conséquent de l'*Aspergillus glaucus*, mais qui, par la couleur noirâtre que ses spores conservent dans les milieux les plus divers (1), par l'odeur musquée

(1) J'ai semé ces spores sur du pain mouillé, sur des tranches d'orange, etc., et sur des milieux artificiels contenant, les uns du tartrate acide d'ammoniaque et des cendres de levûre, les autres du sucre, du nitrate d'ammoniaque et des phosphates; partout elles se sont déve-

qu'elles exhalent et par quelques autres caractères encore, m'a paru, ainsi qu'à M. le docteur Lévillé, dont je suis heureux de pouvoir invoquer ici la grande autorité, constituer une espèce distincte et nouvelle; appelons-le *Aspergillus niger*; nous en décrirons les caractères à la fin de ce Mémoire.

Semons maintenant dans un des ballons à col recourbé du paragraphe II, qui, laissés à eux-mêmes, ne s'altèrent jamais, quelques spores de l'une ou de l'autre de ces Mucédinées; empêchons toute végétation superficielle, et nous verrons, en même temps que ces spores développeront dans l'intérieur du liquide de beaux flocons de mycélium, le tannin subir une destruction progressive, qui se trahira bientôt par la formation de cristaux de plus en plus nombreux d'acide gallique et qui, après quelques jours, sera complète. Si le liquide restait indéfiniment inaltéré dans ces ballons, c'était donc uniquement parce que l'introduction des spores des deux Mucédinées que l'air renferme était rendue impossible par la disposition du col.

Ce mycélium exige pour respirer et se développer une petite quantité d'oxygène libre qu'il transforme en un volume égal d'acide carbonique; il en résulte que si l'on interdit rigoureusement l'accès de l'air, comme nous l'avons dit au paragraphe I, la dissolution devra se conserver indéfiniment, bien qu'on puisse, ainsi que je l'ai fait souvent, y avoir déposé à l'avance d'innombrables spores des deux Mucédinées actives; mais que l'on débouche les flacons, et l'on verra ces spores germer, développer un mycélium floconneux et provoquer en même temps la transformation corrélative du tannin.

Ainsi, l'air tout seul est inactif; seules, les spores du *Penicillium* et de l'*Aspergillus* demeurent impuissantes; il faut et il suffit que la dissolution reçoive à la fois une spore de la Mucédinée active et le contact

loppées et ont reproduit la plante avec tous ses caractères. J'ai pu d'ailleurs, à plusieurs reprises, observer le développement spontané de cette Mucédinée sur du pain, sur de l'urine demeurée acide, sur des matières sucrées, sur des feuilles mortes, etc. C'est donc une plante extrêmement répandue dans la nature, et dont le rôle physiologique est très-important.

C'est encore, nous nous en sommes assurés ensemble, de cet *Aspergillus niger* qu'il s'agit dans les recherches chimiques que mon ami M. Raulin poursuit depuis plusieurs années sur la végétation des Mucédinées dans les milieux artificiels.

d'une quantité d'oxygène suffisante pour faire germer cette spore et la développer en un abondant mycélium. C'est donc l'air qui apporte au tannin les deux principes dont l'action commune est nécessaire à sa destruction, les spores et l'oxygène; il est à la fois véhicule et aliment.

Mais ce n'est pas tout : il faut encore que les spores trouvent dans la dissolution aérée où elles tombent, à côté du tannin qui n'est pour elles qu'une source d'aliment carboné, à côté de l'oxygène qui est nécessaire à la respiration incessante dont tout être vivant est le siège, les principes azotés et minéraux indispensables à leur développement. Dans l'infusion de noix de galle, ces principes abondent, aussi la végétation du mycélium y est-elle très-active, et la transformation du tannin rapide; le développement de la plante est pénible au contraire, et lente la destruction qu'il provoque, dans une dissolution aqueuse de tannin du commerce; la transformation peut toutefois s'y accomplir totalement avec le temps, et cela tient à ce que le tannin du commerce est loin d'être pur; il contient une certaine quantité de principes gras, azotés et minéraux que l'éther a entraînés et dont une partie est insoluble dans l'eau (3 pour 100 environ du poids du tannin), tandis que l'autre s'y dissout avec lui; mais cette source est pauvre, et l'on accélère singulièrement la marche des deux phénomènes corrélatifs, on la rend presque aussi rapide qu'avec la noix de galle, si l'on ajoute à la dissolution de tannin une petite quantité de nitrate d'ammoniaque et de cendres de bois ou de levûre.

Introduites dans une dissolution aérée de tannin pur dans l'eau distillée, les spores ne se développent pas et le tannin demeure inaltéré.

Après avoir analysé ainsi et résumé les conditions générales qu'il est nécessaire et suffisant de remplir pour que le tannin se transforme, nous devons prendre, parmi les nombreuses expériences que nous avons réalisées, quelques exemples à l'appui de chacune des assertions qui précèdent.

1. *Végétation du mycélium dans l'infusion de noix de galle.* — Le 8 octobre 1867, dans trois flacons A, B, C, de 400 centimètres cubes de capacité, j'introduis 200 centimètres cubes d'une infusion de noix de galle filtrée, bouillante et contenant 10^{gr},5 de tannin pour 100 cen-

timètres cubes (1); je bouche les flacons. Quand le liquide est refroidi, je sème dans B des spores de *Penicillium glaucum*, dans C des spores d'*Aspergillus niger*, et je place les trois flacons à l'étuve à 35 degrés. Le surlendemain, les spores se sont développées, mais d'une manière différente pour les deux Mucédinées. Celles du *Penicillium* ont produit des flocons sphériques, très-denses, à reflets irisés, formés de filaments très-minces et très-rapprochés rayonnant autour de la spore primitive qui occupe le centre de la sphère, et qui s'accroissent et se ramifient par leurs extrémités libres, de manière à conserver au flocon sa forme sphérique; s'il y a des variations dans la température, les variations correspondantes dans la vitesse d'accroissement sont indiquées sur le flocon par des zones concentriques. Les spores de l'*Aspergillus* forment aussi des flocons d'abord sphériques, mais beaucoup plus légers et sans chatolement; les filaments rayonnants qui les constituent sont plus gros, plus écartés, et leur développement ultérieur se fait souvent de manière à donner au flocon une forme irrégulière. Cet aspect différent permet, quand le mycélium apparaît dans une infusion abandonnée au contact de l'air, de reconnaître immédiatement à laquelle des deux Mucédinées il appartient. Des deux parts on a soin, si quelque flocon tend à se fixer à la surface, de le faire tomber au fond, et d'empêcher ainsi toute végétation superficielle et toute fructification; on verra plus loin que cette condition est fort importante. Le 11 octobre, on voit apparaître dans C les premiers cristaux d'acide gallique; ils ne commencent à se former dans B que le 12. Les jours suivants, les cristaux augmentent rapidement à mesure que les flocons se développent, et il se forme au fond du vase une couche mêlée de mycélium et de cristaux; le 14 octobre, le liquide de C ne précipite plus par la gélatine, la transformation y est complète après six jours; mais ce n'est que le 16 qu'elle est achevée dans B. Pendant tout ce temps, il ne s'est rien développé dans A, et le tannin y est encore aujourd'hui, après sept mois, inaltéré.

Cette expérience comparative montre que le simple développement

(1) Le tannin a été dosé, dans tout le cours de ces recherches, au moyen d'une dissolution titrée de gélatine contenant 5 grammes de gélatine par litre, suivant le procédé de Fehling. (*Journal de Pharmacie*, 3^e série, t. XXVI, p. 52; 1854.)

du mycélium suffit à transformer le tannin dans l'infusion de noix de galle; on voit aussi que les deux Mucédinées ne paraissent pas agir avec la même activité; des deux, c'est l'*Aspergillus niger* qui, dans les circonstances actuelles de concentration et de température, possède la plus grande énergie.

2. *Végétation dans la dissolution aqueuse de tannin.* — Le 17 octobre 1867, j'introduis dans chacun des ballons A et B 200 centimètres cubes d'une dissolution filtrée de tannin du commerce, contenant 10 grammes de tannin par 100 centimètres cubes; je fais bouillir le liquide pendant quelques minutes, et je porte A à l'étuve; quand B est refroidi, j'y fais tomber des spores d'*Aspergillus niger*, après quoi je le place à l'étuve à côté du premier; les deux ballons sont ouverts. Les spores se développent les jours suivants dans B; le 25 octobre, le mycélium est bien formé, et les cristaux d'acide gallique ont commencé à se déposer; le mycélium se développe lentement ensuite, et le nombre des cristaux augmente peu à peu; mais ce n'est que le 10 novembre que la dissolution ne précipite plus par la gélatine. Ainsi la concentration et la quantité de tannin détruite étant les mêmes, où il suffisait de six à huit jours dans la noix de galle, il en faut vingt-trois, et souvent davantage, dans la dissolution aqueuse de tannin. Il ne s'est d'ailleurs rien développé dans le ballon A placé à côté du premier, et où je n'ai rien semé; le tannin y est demeuré inaltéré jusqu'au 8 décembre. Ce jour-là, je sème dans le liquide des spores d'*Aspergillus*; elles se développent les jours suivants et déterminent bientôt la formation de cristaux nombreux d'acide gallique; en un mot, quand on y a introduit des spores, ce ballon s'est comporté comme le premier. Il faut ajouter qu'il est rare de pouvoir ainsi conserver longtemps à l'étuve, dans un ballon à col droit et ouvert, une dissolution bouillie de tannin; j'en ai déjà cité un exemple à la page 33; le liquide reçoit le plus souvent, après quelques jours, des spores que l'air charrie, et qui s'y développent.

Ainsi la transformation se fait dans une dissolution aqueuse de tannin, aux mêmes conditions que dans l'infusion de noix de galle; mais elle y est beaucoup plus lente, surtout dans la seconde moitié de sa durée; assez active d'abord, elle ne s'achève que très-péniblement. La possibilité de ce développement s'explique, comme je l'ai déjà dit,

par les substances étrangères que contient le tannin du commerce. Quand on dissout dans l'eau 100 grammes de ce corps, il surnage une mousse verdâtre et grasse, qui, recueillie sur un filtre taré, pèse, après dessiccation, 3 à 4 grammes; mais ce n'est là que la partie insoluble des impuretés; une autre partie se dissout avec le tannin, et l'un des principes absorbe rapidement l'oxygène de l'air en passant au jaune rougeâtre : de là la coloration inévitable des dissolutions. C'est dans ces matières étrangères que le mycélium trouve les aliments azotés et minéraux qui lui sont nécessaires; mais cette source est pauvre : de là le développement pénible de la plante et la lenteur de la transformation; aussi les deux phénomènes s'accélèrent-ils en même temps si l'on ajoute au tannin un sel d'ammoniaque et des phosphates.

3. *Végétation avec nitrate d'ammoniaque et phosphates.* — Le 8 octobre, j'introduis dans deux flacons A et B, de 250 centimètres cubes de capacité, 200 centimètres cubes d'une dissolution bouillante, contenant, par 100 centimètres cubes, 10 grammes de tannin, 0^{gr},1 de nitrate d'ammoniaque et 0^{gr},1 de cendres de levûre; je bouche les flacons et les mets à l'étuve; quand ils en ont pris la température, je sème dans B des spores d'*Aspergillus niger*; elles se développent en mycélium; les cristaux d'acide gallique se déposent bientôt, et, le 13 octobre, le liquide ne précipite plus par la gélatine; dix jours ont suffi, là où il en fallait vingt-trois sans nitrate et phosphates. Le liquide A où je n'ai rien semé est encore inaltéré. J'ai souvent obtenu dans ces milieux artificiels une transformation aussi rapide, quelquefois même plus rapide que dans l'infusion de noix de galle.

4. *Concentration diverse.* — J'ai laissé jusqu'ici la concentration constante, et de 10 pour 100. La conversion du tannin se fait très-facilement, cela va sans dire, dans des liqueurs plus étendues, contenant, par exemple, 5 grammes ou 2^{gr},5 pour 100 centimètres cubes, et il m'a semblé que, dans ce cas, le *Penicillium glaucum* se développe plus facilement que l'*Aspergillus niger*, qui convient mieux, au contraire, aux dissolutions plus concentrées. Mais y a-t-il une limite supérieure? J'ai toujours vu la destruction du tannin s'opérer très-rapidement dans les

dissolutions les plus concentrées, celles qu'on obtient, par exemple, en dissolvant 100 grammes de ce corps dans 200 centimètres cubes d'eau; le phénomène revêt alors un aspect curieux. Les spores d'*Aspergillus* introduites dans ce liquide se développent en flocons de mycélium; dès le lendemain, des cristaux d'acide gallique se déposent en grand nombre; on les voit recouvrir les filaments du mycélium et y former des chapelets de plus en plus longs, qui bientôt se détachent pour constituer au fond du vase un dépôt blanc de plus en plus épais; c'est en quelque sorte à vue d'œil que se produisent et tombent ces chaînes cristallines, et l'on peut suivre ainsi, par sa manifestation extérieure, la marche du phénomène; après trois ou quatre jours, le dépôt de cristaux occupe tout le volume du liquide, et c'est alors au sein d'une pâte cristalline que le mycélium continue de se ramifier et de se nourrir pour achever peu à peu la transformation.

5. *Volume d'air nécessaire.* — L'air, avons-nous dit, est nécessaire au développement du mycélium. En effet, après avoir introduit les spores d'*Aspergillus niger* dans la dissolution, traitons-la comme il est dit au paragraphe I; les spores ne se développent pas, et le liquide demeure inaltéré. L'expérience a encore été faite de cette autre manière. Le 5 août 1867, on introduit dans un flacon de 150 centimètres cubes une infusion de noix de galle qui a subi une longue ébullition; on bouche le flacon exactement rempli; après le refroidissement, on débouche pour introduire des spores d'*Aspergillus*, on referme aussitôt, et on lute le bouchon à la cire. Le 15 octobre, aucun flocon de mycélium ne s'est développé, et le tannin est inaltéré; on ouvre le vase: le lendemain, de nombreux flocons se développent, et, le 25 octobre, il n'y a plus trace de tannin.

Mais si l'air est nécessaire au développement de la plante, il faut ajouter qu'un faible volume suffit à produire le poids de plante nécessaire à la transformation d'un poids considérable de tannin.

Le 10 octobre 1867, j'introduis dans un flacon de 240 centimètres cubes 200 centimètres cubes d'une dissolution bouillie, contenant 20 grammes de tannin, 0^{gr},2 de nitrate d'ammoniaque, 0^{gr},2 de cendres de levûre; quand le liquide est refroidi, je sème l'*Aspergillus niger*, et je bouche avec soin. Le 20 octobre, la transformation est complète;

40 centimètres cubes d'air, contenant 8 centimètres cubes d'oxygène, ont suffi, et au delà, pour transformer 20 grammes de tannin.

Le 5 août 1867, j'introduis dans un flacon 248 centimètres cubes d'une dissolution aérée de tannin, contenant 5 grammes de ce corps par 100 centimètres cubes; je sème l'*Aspergillus niger*, et je bouche soigneusement le flacon qui est exactement rempli, sauf une bulle d'air sous le bouchon. Le 7 août, un petit nombre de flocons se développent; ils grandissent jusqu'au 10, après quoi ils restent stationnaires, et se réunissent en une masse unique; le 24 novembre, on les retrouve dans le même état. Le dosage opéré ce jour-là montre que 2 grammes de tannin, c'est-à-dire un sixième du poids total, ont disparu. Il y a donc eu, aux dépens de l'oxygène dissous, germination des spores, développement de petits flocons de mycélium et transformation correspondante; après quoi, les choses sont demeurées indéfiniment dans le même état, tant du côté de la plante que du côté du tannin. Toutes les fois que, dans des conditions en apparence semblables, j'ai vu le mycélium continuer à se développer progressivement en détruisant peu à peu tout le tannin, j'ai pu m'assurer que le bouchon, qui tenait bien les premiers jours, avait cessé de fermer exactement.

Il suffit donc de la petite quantité d'air dissous pour que la plante puisse germer et atteindre un certain développement en produisant une certaine transformation corrélative. C'est ce qui nous a obligé, dans notre premier paragraphe, d'éliminer le gaz de la dissolution; c'est ce qui explique encore pourquoi on a pu observer quelquefois des transformations totales après un temps très-long, dans des flacons où l'accès de l'air extérieur paraissait interdit. Robiquet et M. Laroque s'y sont trompés, et en ont conclu que la conversion pouvait se faire à l'abri de l'air.

6. *Poids de plante formé.* — Cette circonstance trouve d'ailleurs son explication naturelle dans ce fait, que le mycélium, dont le développement provoque la destruction du tannin, a un poids excessivement faible, relativement au poids du tannin transformé. Si l'on a soin d'empêcher toute végétation superficielle, le poids du mycélium séché à l'étuve atteint ordinairement 0^{sr},010 pour 10 grammes de tannin détruit, c'est-à-dire 1 millième et quelquefois moins encore. Pour ali-

menter la respiration d'un poids de plante aussi minime, on comprend qu'il suffise d'une très-faible quantité d'oxygène.

7. *Substances nuisibles.* — Telles sont les principales conditions de la vie profonde de ces deux Mucédinées. Ajoutons que toutes les circonstances accidentelles qui gênent ou empêchent le développement de la plante gênent ou empêchent au même degré la transformation du tannin. L'addition d'une petite quantité d'alcool absolu, de quelques gouttes de créosote ou d'acide phénique, suffit à préserver ce corps de l'invasion du mycélium, et à en assurer la conservation indéfinie. Mais la plante a un pouvoir de résistance très-remarquable à l'égard de l'acide sulfurique; elle ne paraît gênée par l'acidité du milieu que quand on dépasse une dose qui paraît énorme pour un organisme aussi délicat. M. Laroque a étudié l'action des autres agents antiseptiques, et l'influence nuisible qu'il leur a vu exercer est le principal argument qu'il invoque pour assimiler ce phénomène aux fermentations ordinaires.

8. *Observations anciennes du mycélium.* — Maintenant que nous connaissons la cause prochaine de la transformation du tannin, il ne sera peut-être pas sans intérêt de remarquer que M. Laroque mentionne en passant, et sans y insister autrement, l'existence de la plante dont nous étudions les propriétés. « Il se dépose, dit-il, dans les liqueurs des flocons comme albumineux, qui, examinés au microscope, se présentent sous forme de buisson, d'où partent des branches qui se répandent assez loin » (1). C'est précisément le mycélium en question. C'est encore ce mycélium qui s'est développé quand M. Ed. Robiquet a vu, dans des dissolutions aqueuses de tannin, « se déposer, au bout de quatre jours, des flocons de nature albuminoïde, qui, avec la potasse, donnent un dégagement sensible d'ammoniaque » (2). Ces flocons, introduits dans une dissolution de tannin bouillie, y déterminent, après trois jours, une formation sensible d'acide gallique, et, après onze jours, une transformation totale. Pour donner une idée de l'état

(1) *Loc. cit.*, p. 204.

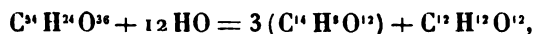
(2) *Loc. cit.*, p. 245.

des esprits au sujet de la nature des fermentations en l'année 1854, il suffira de dire que M. Ed. Robiquet n'a pas même songé à examiner, comme l'avait fait M. Laroque, la structure de ces flocons, dont il reconnaissait l'action si efficace; ils sont de nature albuminoïde, et cela suffit; l'auteur se croit autorisé à en conclure que ce sont des flocons de pectase, qui, toute formée dans la noix de galle, a été entraînée à l'état soluble dans la préparation du tannin, et s'est d'abord redissoute avec lui pour se précipiter ensuite de nouveau en reprenant l'état de pectase insoluble.

Nous avons établi que c'est le développement du mycélium du *Penicillium glaucum* ou de l'*Aspergillus niger* qui provoque la transformation du tannin; nous avons analysé les conditions de milieu auxquelles sont liées la vie de la plante et la conversion qui lui est corrélative; examinons maintenant en quoi consiste cette conversion.

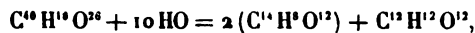
IV. — *La transformation du tannin est toujours un dédoublement en acide gallique et en glucose avec fixation des éléments de l'eau.*

Sous l'influence de la vie et du développement du mycélium, le tannin se dédouble en acide gallique et en glucose avec fixation des éléments de l'eau suivant l'équation :



où l'on a triplé la formule primitive $C^{14}H^8O^{12}$ donnée par MM. Pelouze et Liebig, pour lui faire représenter l'équivalent réel du tannin (1);

(1) M. Strecker altère la formule admise pour le tannin et le représente par $C^{16}H^{18}O^{20}$; l'équation devient alors



c'est-à-dire que 466 grammes de tannin donnent 376 grammes d'acide gallique et 180 grammes de glucose, ou bien que 10 grammes de tannin produisent 8^{gr},06 d'acide gallique et 3^{gr},82 de glucose. La proportion d'acide gallique est sensiblement la même, mais le glucose est en proportion plus forte d'environ un quart. Comme je n'en ai jamais obtenu même la quantité indiquée par l'équation du texte, il m'a été impossible de décider entre les deux, et j'ai dû choisir celle qui, avec l'avantage de conserver l'ancienne formule du tannin, donne pour le glucose le nombre le plus faible.

c'est-à-dire que 636 grammes de tannin donnent 564 grammes d'acide gallique et 180 grammes de glucose, ou encore que 10 grammes de tannin produisent 8^{gr},02 d'acide gallique et 2^{gr},82 de glucose.

Je vais citer pour exemple une des nombreuses expériences que j'ai réalisées :

Le 17 octobre 1867, j'introduis dans un vase cylindrique ouvert 500 centimètres cubes d'une dissolution contenant 48^{gr},3 de tannin (50^{gr} — 1^{gr},7 de résidu gras insoluble), 0^{gr},5 de nitrate d'ammoniaque, 0^{gr},5 de cendres de levûre. Je sème l'*Aspergillus niger*, et je place le vase à l'étuve à 35 degrés; dès le lendemain, les spores se développent en flocons légers; le 20, apparaissent les premiers cristaux d'acide gallique, et le 27 octobre, après dix jours, le liquide ne précipite plus par la gélatine. Le mycélium s'est développé abondamment dans les parties profondes, et l'on a eu soin d'empêcher toute végétation superficielle en refoulant les flocons qui tendaient à se placer à la surface. On filtre le liquide; le filtre taré retient à la fois les cristaux d'acide gallique et le mycélium; on le lave à l'eau bouillante jusqu'à ce que tout l'acide soit entraîné; le filtre, séché et pesé, donne pour le mycélium formé 0^{gr},022; c'est à peine $\frac{1}{2000}$ du poids de tannin détruit. Le liquide évaporé dans une capsule tarée donne un résidu formé d'acide gallique et de glucose qui pèse 48^{gr},1; on le reprend par l'eau qui dissout le glucose et une partie de l'acide gallique; on jette sur un filtre taré, on lave, on sèche, on obtient pour l'acide gallique non dissous 23^{gr},5; le liquide filtré est précipité par un excès d'acétate de plomb; on fait bouillir, on pèse le gallate de plomb sec sur un filtre taré; on en déduit le poids d'acide gallique précipité, 15 grammes; acide gallique total, 38^{gr},5. Le liquide traité par un courant d'acide sulfhydrique qui élimine le plomb en excès, filtré et évaporé doucement, donne un sirop jaune, où le glucose est dosé par la liqueur titrée de Fehling; on en trouve 9^{gr}, 4, ce qui s'accorde avec la différence

$$48^{\text{gr}},1 - 38^{\text{gr}},5 = 9^{\text{gr}},6.$$

Théoriquement, 48^{gr},3 de tannin doivent donner 52^{gr},35 de résidu solide ainsi composé : 38^{gr},74 d'acide gallique et 13^{gr},61 de glucose. La comparaison avec les quantités obtenues par fermentation montre que l'acide gallique se retrouve tout entier, mais que le sucre est en

quantité notablement moindre; il y a eu perte ou plutôt utilisation spéciale de 4 grammes de glucose.

Ainsi, disparition d'une certaine quantité de sucre et production simultanée d'un mycélium, tels sont les deux faits corrélatifs qui s'observent pendant le dédoublement du tannin, et qui doivent servir à l'expliquer; le sucre disparu est employé à la fois à la formation des tissus de la plante et à la combustion incessante dont ils sont le siège, et qui constitue sa respiration.

Dans toutes les expériences faites dans ces conditions, j'ai toujours obtenu le poids total d'acide gallique indiqué par l'équation, et toujours aussi le sucre s'est trouvé en proportion notablement moindre, et d'autant plus inférieure au nombre théorique que la fermentation avait mis plus de temps à se terminer. Ceci m'amène à dire ce qui se passe une fois que tout le tannin s'est dédoublé, quand on laisse le liquide à l'étuve. On voit alors le mycélium continuer à se développer au fond du vase, en même temps que la quantité de glucose diminue progressivement. C'est ainsi que, dans une liqueur installée le même jour que la précédente et absolument dans les mêmes conditions, où la fermentation était achevée le 28 octobre, mais qui avait été laissée à l'étuve jusqu'au 15 novembre, j'ai retrouvé une proportion identique d'acide gallique, mais seulement 5^{gr},5 de glucose. Dans une autre expérience, où le liquide, après la destruction totale du tannin, a été laissé à l'étuve pendant un mois, et où l'on a eu soin d'empêcher pendant ce temps tout développement superficiel de mycélium, on a retrouvé encore tout l'acide gallique, mais seulement des traces de glucose. C'est cette marche des choses qui explique le résultat négatif obtenu par M. Ed. Robiquet, résultat qui l'avait conduit à affirmer que, dans sa transformation spontanée, le tannin ne produit pas de sucre, mais seulement de l'acide gallique.

Enfin, quand le glucose lui-même a disparu complètement pour alimenter le développement des tissus et la respiration de la plante, l'acide gallique, jusque-là respecté, est attaqué à son tour et diminue progressivement.

En résumé, c'est au glucose que le tannin peut lui fournir en se dédoublant, que la plante emprunte les aliments hydrocarbonés nécessaires à la constitution de ses tissus et à la combustion lente dont ils

sont le siège incessant, et cette circonstance explique le mécanisme du dédoublement.

Fermentation alcoolique consécutive, fermentation industrielle. — Mais si le glucose, une fois mis en liberté par le mycélium, peut, quand il ne reste plus de tannin, servir d'aliment carboné au développement ultérieur de la plante, il peut aussi alimenter au même titre d'autres organismes qui eussent été par eux-mêmes impuissants à le dégager de sa combinaison avec l'acide gallique; par exemple, il pourra subir la fermentation alcoolique avec production de son ferment particulier, la levûre de bière. Quoique je n'aie pas vu une seule fois, dans le cours de ces expériences, cette fermentation apparaître spontanément dans les liquides où le glucose se trouvait en liberté, même longtemps après la disparition du tannin, cependant il m'a été très-facile de la provoquer toutes les fois que je l'ai voulu. Il suffit d'introduire une petite quantité de levûre de bière dans la dissolution, après que le tannin y a disparu, ou du moins lorsqu'il n'en reste plus qu'une quantité insuffisante pour tuer les cellules de levûre en en coagulant le contenu albumineux, pour déterminer un dégagement abondant d'acide carbonique, une production d'alcool et une formation simultanée de nouvelles cellules de levûre : tout cela se comprend de soi-même. Mais ce fait, qui ne se présente que très-rarement ou pas du tout dans les recherches de laboratoire, surtout quand on n'emploie que des liquides filtrés et limpides, devient plus fréquent quand on se sert de la noix de galle pulvérisée, délayée dans l'eau. Braconnot a observé, dès 1818, les fermentations alcooliques qui se développent dans ces circonstances. Or, c'est précisément dans ces conditions que l'on se trouve dans la fabrication industrielle de l'acide gallique; j'ajoute que dans cette fabrication on a le plus grand intérêt à ce que le glucose soit promptement éliminé, car il se dissoudrait avec l'acide gallique dans l'eau ou dans l'alcool bouillants, par lesquels on traite la pâte, et il en empêcherait ensuite la cristallisation. La fermentation gallique, telle que la comprennent les industriels, n'est donc réellement achevée que quand le sucre a disparu en laissant à nu l'acide gallique facile à extraire désormais et à purifier. Or, comme cette disparition du sucre est le seul phénomène qui se manifeste à l'extérieur par un dégagement gazeux, les

fabricants prennent ce dégagement pour apprécier l'état de la fermentation gallique; pour eux, la fermentation gallique commence quand la masse pâteuse se soulève et se gonfle : le temps considérable qui s'écoule jusque-là, et pendant lequel la masse demeure affaissée et silencieuse, est jugée nécessaire à la destruction par l'eau des tissus de la noix et à la formation de la pâte; la fermentation gallique est en pleine activité quand la masse fortement boursouflée dégage beaucoup d'acide carbonique et de vapeurs alcooliques; elle est terminée quand la masse retombe et s'affaisse et que les petits cristaux d'acide gallique, débarrassés de l'enduit qui les empâtait, brillent à l'œil. Quand le dégagement gazeux tarde à se montrer, on dit que la fermentation gallique marche mal et on lui vient en aide en mêlant à la masse une assez forte proportion de ferment, c'est-à-dire de levûre de bière. En un mot, nous voyons que l'on mêle et que l'on confond les deux fermentations distinctes qui se succèdent dans la même cuve; la première, invisible et silencieuse, produite par le mycélium de nos Mucédinées, que l'on a soin, en remuant la masse tous les jours, d'empêcher de vivre à la surface et d'y fructifier : c'est la vraie et seule fermentation gallique, celle où la plante dédouble le tannin en acide gallique et en glucose, en faisant disparaître une partie de ce dernier corps, pour former ses tissus et pourvoir à sa respiration; la seconde, tumultueuse et rapide, produite par la levûre de bière et qui porte sur le sucre restant pour le convertir en alcool et en acide carbonique, et permettre ainsi l'extraction facile de l'acide gallique; mais cette dernière ne commence et ne peut commencer qu'à une époque où il ne reste plus qu'une quantité très-faible de tannin, et où la première est presque entièrement terminée.

C'est une confusion semblable que fait M. Laroque, quand il dit en comparant la transformation du tannin à la fermentation alcoolique : « Je crois qu'il est impossible de séparer ces deux sortes de fermentation, car dans l'une comme dans l'autre il y a dégagement de gaz, dégagement de chaleur, développement de ferment et transformation d'un corps en un autre. Je dis qu'il y a dépôt de ferment : en effet, si l'on examine au microscope une poudre d'un blanc jaune ou grisâtre qui se dépose, soit dans une macération de noix de galle, soit dans une infusion filtrée, on retrouve dans ce dépôt toutes les propriétés du fer-

ment de bière; toutefois celui de la noix de galle est plus petit, les globules sont plus pâles et sous forme de chaînons... (p. 203). » Ces globules de levûre n'apparaissent que quand il y a fermentation alcoolique consécutive; leur existence et leur développement ne sont nullement liés à la fermentation gallique (1).

Pouvoir rotatoire du tannin. — Nous avons vu que, sous l'influence de la vie du mycélium et sauf une partie du glucose qui disparaît pour former et nourrir la plante, le dédoublement du tannin s'opère comme dans l'expérience de M. Strecker. Il convient maintenant de rappeler que M. Buignet (2) a ajouté à cette expérience un élément intéressant en déterminant le pouvoir rotatoire du sucre qui s'y produit et en montrant qu'il est de + 53 degrés, c'est-à-dire égal à celui du glucose d'amidon et de même sens que lui. J'ai de mon côté obtenu ce même nombre avec le sucre retiré du tannin par fermentation, en même temps que je me suis assuré que l'acide gallique n'exerce aucune action sur la lumière polarisée; tout au moins 4 grammes de cet acide dissous dans 30 centimètres cubes d'alcool n'ont-ils pas fait reparaitre l'image avec le tube de 20 centimètres. Voilà donc une substance, le tannin, regardée comme inactive, puisqu'il n'est dit nulle part qu'elle soit douée du pouvoir rotatoire, et qui, par une simple fixation d'eau, se dédoublerait en un corps dextrogyre, le glucose, et en un corps inactif, l'acide gallique. Or l'apparition de la propriété rotatoire moléculaire dans les dérivés d'un corps qui ne la possède pas lui-même serait un fait jusqu'à présent sans exemple. Le tannin est-il donc réellement inactif?

Je me suis assuré que le tannin dévie vers la droite le plan de polarisation de la lumière incidente.

La coloration jaune-rougeâtre des dissolutions, très-intense quand elles sont concentrées, et que je n'ai pu, avec le tannin que j'avais à

(1) En étudiant la transformation de l'urée en carbonate d'ammoniaque et de l'acide hippurique en acide benzoïque et en glycolamine, j'ai déjà eu l'occasion de signaler des circonstances où deux et même trois fermentations distinctes, simultanées ou successives, s'accomplissent au sein du même liquide, et de montrer que chacune d'elles a son ferment particulier absolument comme si elle était seule, que chacune d'elles est directe au même titre. (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. I; 1864.)

(2) BUIGNET, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LXI; 1861.

ma disposition, ni éviter, ni faire disparaître, rend très-difficiles les mesures précises du pouvoir rotatoire avec l'appareil de Biot. Mais le nouveau polarimètre de Wild-Hofmann, qui donne des rotations assez grandes avec un tube de 5 centimètres, m'a été, dans cette circonstance, d'un précieux secours. Avec ce petit appareil, une dissolution limpide de 32^{gr},8 de tannin dans 125 centimètres cubes d'eau distillée, m'a donné dans le tube de 0^m,05, et à la température de 16 degrés, une rotation de 5 degrés, qui, rapportée à l'analyseur, se fait vers la droite. On a donc pour le pouvoir rotatoire du tannin :

$$\rho = \alpha \frac{v}{pl} = + 5^{\circ} \frac{125}{32,8 \times \frac{1}{2}} = + 38^{\circ},1 \quad \rho = + 38^{\circ},1.$$

Ainsi point d'anomalie : le tannin possède un pouvoir rotatoire de même sens que celui du glucose qu'il produit, et qui est à ce dernier comme 1 est à 1,4; mais si l'on compare la quantité totale d'action rotatoire moléculaire du milieu, avant et après la fermentation, on voit qu'elle a diminué dans le rapport de 38 à 15.

V. — *Quand la plante vit et fructifie à la surface, elle brûle directement le tannin sans le dédoubler.*

Nous avons jusqu'ici, dans toutes nos expériences, évité avec soin la végétation superficielle du mycélium. C'est qu'en effet, pour que le dédoublement que nous venons d'étudier s'opère intégralement, il est nécessaire que la plante vive et se développe dans la profondeur de la dissolution; nous savons que le poids des flocons de mycélium formés est alors très-faible, 1 millième environ du poids de tannin transformé, et quelquefois moins encore. Laissons au contraire la Mucédinée s'étaler à la surface et y former une membrane continue, bientôt recouverte d'innombrables fructifications, et nous la verrons agir tout autrement. La plante brûle alors rapidement et directement le tannin en exhalant de grandes quantités d'acide carbonique; il ne se fait de dédoublement que celui qui correspond au faible développement des parties plongées du mycélium, et le glucose formé est brûlé à son tour et disparaît avant l'acide gallique; de sorte que tout ce qu'on retire d'une dissolution

concentrée de tannin, après quelques jours d'une végétation superficielle active, c'est une faible quantité d'acide gallique. Prolonge-t-on un peu l'action, après la destruction du tannin, le résidu est sensiblement nul, l'acide gallique ayant été brûlé à son tour. Mais, en revanche, le poids de plante formé dans ces conditions est très-considérable et peut atteindre $\frac{1}{10}$ et jusqu'à $\frac{1}{4}$ du poids du tannin détruit.

Prenons un exemple :

Le 19 octobre 1867, je mets à l'étuve, dans un cristalliseur, 300 centimètres cubes d'une dissolution contenant 14^{gr},55 de tannin purifié, 0^{gr},3 de nitrate d'ammoniaque, 0^{gr},3 de cendres de levûre, et je projette à la surface des spores de *Penicillium glaucum*. Le 21, la surface est à moitié recouverte d'un mycélium membraneux déjà verdissant; quelques flocons flottent dans le liquide; le 23, elle est entièrement envahie par une magnifique couche verte qui s'épaissit et se développe encore les jours suivants en se creusant de rides profondes et en laissant exsuder de nombreuses gouttelettes d'eau. Le 28 octobre, je mets fin à l'expérience : le développement des flocons intérieurs est demeuré très-faible; il ne s'est pas déposé de cristaux d'acide gallique. La plante, recueillie sur un filtre taré, lavée à l'eau bouillante et séchée, pèse 3^{gr},10. Le liquide, évaporé dans une capsule tarée, laisse un résidu de 3^{gr},40; la différence avec 15^{gr},15, 11^{gr},75, donne le poids de matière disparue; 11^{gr},75 de matière ont donc été absorbés par la plante, et fixés ou répandus par elle dans le milieu extérieur; en retranchant le poids de la plante formée, on a 8^{gr},65 pour la matière consumée. Les 3^{gr},40 de résidu, en négligeant ce qui peut y rester de nitrate d'ammoniaque et de phosphates, sont redissous et traités par une liqueur titrée de gélatine dont il faut 35 centimètres cubes pour précipiter entièrement 0^{gr},2 de tannin; il en faut 365 centimètres cubes pour obtenir la précipitation totale, ce qui correspond à 2^{gr},1 de tannin non détruit. On filtre la liqueur, on la précipite par un excès d'acétate de plomb, on fait bouillir, on filtre, et l'on obtient 5 grammes de gallate de plomb sec, qui contiennent 1^{gr},4 d'acide gallique formé : total, 3^{gr},5. Il n'y a donc pas de glucose dans le résidu : ce qu'on vérifie en s'assurant que la liqueur débarrassée par l'acide sulfhydrique de l'excès de plomb qu'elle renferme, et filtrée, ne précipite pas la liqueur de Fehling. En somme, il a disparu 12^{gr},45 de tannin, et comme 1^{gr},4 d'acide gallique

formé correspond à 1^{er},74 de tannin dédoublé, et à 0^{er},49 de glucose produit, mais brûlé ensuite par la plante, ces 12^{er},45 de tannin se décomposent ainsi :

Tannin disparu....	12 ^{er} ,45	{	Tannin brûlé directement sans être dédoublé.....	10 ^{er} ,71
			Tannin dédoublé..	1 ^{er} ,74
			{ Glucose brûlé consé-	
			cutivement.....	0 ^{er} ,49
			Acide gallique restant.	1 ^{er} ,40

Dans une autre expérience installée le 25 octobre, 300 centimètres cubes d'une dissolution contenant 29 grammes de tannin purifié, et une petite quantité de nitrate d'ammoniaque et de cendres de levûre, ont été placés à l'étuve dans un très-large cristalliseur. On y projette des spores d'*Aspergillus niger*, qui, au bout de trois jours, ont envahi toute la surface en y formant une magnifique croûte, couverte de fructifications d'abord jaunes, puis d'un brun chocolat, enfin noires et exhalant une forte odeur musquée; les jours suivants, la plante continue de s'étendre et sa surface se creuse de rides profondes, en même temps qu'elle se couvre de nombreuses et fines gouttelettes d'eau. Le 3 novembre, après huit jours d'action, on enlève la plante; elle pèse, lavée et sèche, 3^{er},5. Le liquide évaporé laisse un résidu de 2^{er},6, où l'analyse montre 1^{er},1 de tannin non encore détruit, et 1^{er},5 d'acide gallique formé, correspondant à 1^{er},9 de tannin dédoublé, sans qu'il y ait traces de glucose. Ainsi :

Tannin disparu....	27 ^{er} ,90	{	Tannin brûlé sans dédoublement.....	26 ^{er} ,00
			Tannin dédoublé par le	
			mycélium profond. 1 ^{er} ,9	
			{ Glucose brûlé consé-	
			cutivement.....	0 ^{er} ,52
			Acide gallique restant.	1 ^{er} ,50

Le poids total de matière disparue en huit jours est de 26^{er},52, qui ne sont représentés que par 3^{er},5 de plante; le reste, 23 grammes, a été consumé.

C'est pendant les deux premiers jours qui suivent l'ensemencement, quand les plaques superficielles issues de la germination des spores n'ont pas encore, en se rencontrant et en s'enchevêtrant, envahi toute

la surface du liquide, que les flocons intérieurs, vivant aux dépens de l'oxygène dissous, provoquent le faible dédoublement que nous avons constaté dans les exemples précédents; il y a tout à la fois, pendant cette courte période, combustion directe du tannin à la surface et dédoublement dans la profondeur. Mais aussitôt que la surface est entièrement recouverte par le champignon en voie de fructification, il ne peut plus arriver désormais d'oxygène aux flocons profonds; ils cessent alors de se développer et d'agir; ils se comportent comme s'ils se trouvaient dans un flacon rempli et hermétiquement bouché, et le dédoublement en demeure indéfiniment au point où il était au moment de l'occlusion superficielle; la plante n'agit plus alors sur le milieu que par combustion directe, en faisant rapidement disparaître le tannin. Il en résulte qu'on peut donner à l'expérience une forme saisissante.

On introduit la dissolution de tannin dans un matras à long col qu'elle remplit jusque vers le sommet, et l'on projette à la surface les spores d'*Aspergillus niger*; elles germent et constituent en moins d'une demi-journée une pellicule qui occupe toute la surface du liquide en se relevant un peu sur le pourtour pour adhérer au verre, et qui fructifie bientôt; cette membrane absorbe avidement l'oxygène de l'air à mesure qu'il lui arrive, pour le convertir en acide carbonique; elle joue ainsi le rôle d'un excellent bouchon qui empêche l'oxygène d'arriver jamais au liquide sous-jacent. Il se forme bien çà et là, dans la profondeur de ce dernier, aux dépens de l'air dissous, quelques petits flocons de mycélium, mais leur développement s'arrête forcément quand cette source précaire est épuisée, et le tannin se conserve désormais et pendant plusieurs mois sans se dédoubler. Ainsi un ballon à fond plat, renfermant 700 centimètres cubes d'une dissolution contenant 70 grammes de tannin, du nitrate d'ammoniaque et des phosphates, mis à l'étuve le 19 octobre 1867, dans les conditions précédentes, n'avait pas encore laissé déposer, le 15 février 1868, un seul cristal d'acide gallique; mais le tannin avait peu à peu disparu dans le col et dans le tiers supérieur du matras, où le liquide s'était presque décoloré; des stries et une coloration de plus en plus forte indiquaient l'accroissement de densité de la dissolution à mesure qu'on s'approchait du fond. On peut arriver ainsi à faire disparaître, avec le temps, tout le tannin d'une dissolution, par simple combustion directe, sans qu'il se forme plus

qu'une quantité insignifiante d'acide gallique. La vie superficielle de la Mucédinée tue sa végétation profonde.

Suivant la manière dont elle se développe, la même plante peut donc tour à tour dédoubler le tannin sans en brûler la moindre partie, ou le brûler purement et simplement sans le dédoubler, c'est-à-dire prendre le carbone qui lui est nécessaire, tantôt au sucre du tannin, tantôt au tannin lui-même. Ces combustions rapides et totales de matières organiques, par la végétation superficielle des végétaux microscopiques et le rôle important qu'elles jouent dans l'économie de la nature, ont été étudiés pour la première fois par M. Pasteur; nous en voyons ici un nouvel et curieux exemple (1).

Au point de vue industriel, il résulte de ce qui précède qu'il faut bien se garder de laisser le mycélium vivre et fructifier à la surface de la pâte, de la laisser *moisir*, comme on dit; car, si le glucose est éliminé promptement par cette voie, ce qui est un avantage industriel, si l'acide gallique produit n'est pas brûlé tant qu'il reste du sucre, nous savons qu'une partie considérable du tannin disparaît en même temps par combustion directe et sans se dédoubler, ce qui diminue beaucoup le rendement. De là une pratique très-simple, mais très-importante, à laquelle je pense que les industriels ne manquent jamais aujourd'hui, sans peut-être en bien comprendre la raison : celle de remuer tous les jours de fond en comble la masse à fermenter. On évite ainsi toute fructification et toute combustion superficielle, et le dédoublement du tannin s'opère intégralement; le glucose reste, il est vrai, dans la masse, mais on en est quitte pour l'éliminer par voie de fermentation alcoolique subséquente. C'est sans doute parce qu'anciennement on négligeait

(1) Chaque année les végétaux jonchent la terre de leurs débris; comment se fait le retour de ces organes morts au sol et à l'atmosphère d'où ils sont issus? En d'autres termes, comment les composés si complexes qui les constituent reviennent-ils aux formes simples de la nature minérale? Nos expériences éclairent la question en ce qui concerne le tannin. On sait en effet que les organes séparés de la plante, les feuilles notamment, sont rapidement envahis par le mycélium de Mucédinées diverses, parmi lesquelles on rencontre les *Penicillium* et les *Aspergillus*; ce mycélium, en se développant dans l'intérieur de l'organe, y dédouble le tannin, en absorbant une partie du sucre pour constituer ses propres tissus; puis, venant fructifier à la surface, il brûle d'abord le reste du sucre et le tannin non encore dédoublé, après quoi il consume peu à peu l'acide gallique.

ette pratique, parce qu'on laissait moisir plus ou moins complètement la pâte, qu'il est dit dans certains auteurs que, par le procédé de Scheele, on ne retire de la noix de galle que 8 pour 100 d'acide gallique (1). La noix de galle contient de 40 à 66 pour 100 de tannin, qui doivent donner, si l'on évite toute perte par combustion, de 32 à 53 pour 100 d'acide gallique cristallisé, c'est-à-dire 4 à 7 fois plus que la proportion précédente; jé me suis assuré, par des essais où j'ai imité en petit les conditions industrielles, que la quantité d'acide gallique est, en effet, supérieure au tiers, et atteint souvent la moitié du poids de la noix. Mais revenons au dédoublement du tannin.

VI. — *La plante n'émet pas de principe soluble capable d'agir en dehors de l'organisme.*

Il nous reste à montrer que c'est bien par le fait même de sa vie et de son développement que le mycélium dédouble le tannin, et non par l'action de principes solubles sécrétés par lui et capables d'agir en dehors de l'organisme.

Nous savons déjà que quand les spores germent dans une dissolution aérée, mais enfermée dans un flacon bouché qu'elle remplit entièrement, elles produisent des flocons qui grandissent tant qu'il reste de l'oxygène dissous, mais qui s'arrêtent ensuite dans leur développement; on les retrouve avec le même aspect au bout de plusieurs mois. Or, de même qu'ils sont stationnaires, ils sont inactifs, et le dosage du tannin, exécuté immédiatement après leur arrêt de développement, et six mois plus tard, donne exactement le même résultat. Il n'en serait pas ainsi si la plante pouvait agir en dehors d'elle par les principes solubles qu'elle contient: l'action se continuerait alors et s'achèverait. Mais complétons la démonstration par de nouvelles expériences.

Nous avons introduit, le 22 octobre 1867, dans une série de flacons contenant, les uns une dissolution de tannin, les autres une infusion filtrée de noix de galle, un mycélium abondant extrait d'une ferment-

(1) PELOUZE et FREMY, *Traité de Chimie*, 1^{re} édition, t. IV, p. 306.

tation en activité, et après avoir traité ces liquides comme il est indiqué au premier paragraphe, nous les avons mis à l'étuve, à côté de deux autres flacons où nous avons pareillement introduit du mycélium, mais en les laissant ouverts. Dans tous les flacons de la première série, le tannin est encore aujourd'hui, après plus de six mois, inaltéré; dans les seconds, le mycélium s'est développé, et la transformation s'est promptement achevée.

Ainsi, dans les circonstances où elle peut agir chimiquement, mais où tout développement lui est interdit, puisqu'elle ne possède pas trace d'oxygène, la plante reste inactive. Elle n'agit donc que par le fait même de son développement et de sa nutrition, et nullement par l'action chimique des liquides qu'elle renferme.

La même impuissance se révèle si l'on broie le mycélium avec un peu d'eau, et si l'on ajoute le suc filtré à une dissolution de tannin sur laquelle on fait ensuite le vide.

Des expériences de notre premier paragraphe, combinées avec celles-ci, il résulte qu'il ne saurait être question ici de ferment soluble d'aucune sorte, ni préexistant dans la noix de galle, ni contemporain de la vie du mycélium, ni postérieur à sa destruction : c'est la nutrition même de la plante, et cette nutrition seule, qui provoque le dédoublement du tannin.

La nécessité du contact de l'air, pendant tout le temps de la fermentation, nous a donc permis de donner une preuve directe de l'impuissance des principes solubles du ferment, ou du ferment tout entier, quand on lui interdit de se développer, preuve qui ne se peut apporter ni dans la fermentation alcoolique, ni dans aucune de celles où l'air n'agit que comme véhicule du ferment et non comme aliment.

VII. — *Conclusions.*

En résumé, nous voyons que la transformation du tannin à la température ordinaire est toujours un dédoublement en acide gallique et en glucose avec fixation des éléments de l'eau, et que ce dédoublement est toujours corrélatif de la vie et du développement d'un être organisé végétal, qui a, cette fois, sa place bien connue dans nos classifications :

c'est le mycélium du *Penicillium glaucum* Link, ou celui de l'*Aspergillus niger*.

A ce titre, ce phénomène rentre donc sous l'énoncé général des fermentations proprement dites, telles que les travaux de M. Pasteur nous les ont fait connaître; mais il se présente ici une circonstance intéressante qui caractérise un type nouveau. Notre plante, en effet, a besoin, pour vivre, de l'oxygène de l'air; dans la fermentation alcoolique et dans toutes celles qui se rattachent au même type, la levûre en est, au contraire; indépendante. Les vues théoriques de M. Pasteur sur le mode d'action des ferments n'en subsistent pas moins, pourvu qu'on en généralise l'application. Dans les fermentations ordinaires, le ferment prend l'oxygène qui lui est nécessaire à la substance fermentescible, dont l'équilibre se trouve dès lors détruit et qui se résout en groupements nouveaux; ici ce n'est point l'oxygène, c'est le sucre que notre ferment enlève au tannin, parce que lui seul peut fournir à la plante dans sa vie profonde l'aliment hydrocarboné indispensable à la constitution de ses tissus; d'où encore rupture d'équilibre et dédoublement.

On connaît donc maintenant, sans parler des combustions totales que M. Pasteur a étudiées le premier et dont j'ai apporté plus haut un nouvel exemple, trois types distincts de fermentations accomplies par les êtres vivants : 1° fermentation acétique; 2° fermentation alcoolique et ses congénères : lactique, butyrique, etc.; fermentations ammoniacale et benzoïque; 3° fermentation gallique; et cette dernière nous introduit, pour la première fois, dans le domaine de végétaux beaucoup plus élevés en organisation que les ferments antérieurement connus.

Je ne saurais enfin terminer cet exposé sans rapprocher le phénomène que nous venons d'étudier de celui que, d'après les recherches de M. Pasteur, le *Penicillium glaucum* réalise quand il décompose le paratartrate acide d'ammoniaque en ses tartrates droit et gauche constituants, pour détruire le sel droit et isoler le sel gauche (1).

(1) Dans des expériences encore inédites, M. Pasteur a reconnu : 1° que le *Penicillium glaucum* peut détruire à son tour le tartrate gauche; 2° que les tartrates gauches de chaux et d'ammoniaque peuvent, eux aussi, fermenter, quoique beaucoup plus difficilement que les sels droits correspondants.

VIII. — *Description d'une nouvelle espèce d'Aspergillus.*

ASPERGILLUS NIGER . — Flocci imi liquoris steriles, sphærici, laxati, e filamentis radiatis articulatis ramosissimis compositi.

Flocci summi liquoris fertiles, hemisphærici, in discos fusi quorum conjunctione et intertextu membrana continua brevi constituitur. Stipites erecti, simplices, continui, ad basim goniculati; capituli basidiis elongatis, radiatis, confertis, omnino tecti; catenæ sporarum fasciculatim junctæ, subæquales; sporæ sphæricæ, verrucosæ, nigrescentes, 0^{mm},004 ad 0^{mm},005 diametro æquantes.

Hab. — In dilutis gallis, in solutis tannino, saccharo, acido citrico, acido tartrico, etc.; in pane humido, in urinâ acidâ, in foliis deciduis, etc. — Diffusissima species.

J'ai dit que, par leurs filaments plus gros, par leur texture plus lâche et dépourvue de reflets irisés, les flocons profonds d'*Aspergillus niger* se distinguent à première vue de ceux de *Penicillium glaucum* qui sont très-denses, formés de filaments plus minces et chatoyants. Les cellules constitutives du mycélium sont remplies de protoplasma transparent creusé de larges vacuoles; elles n'ont pas, comme celles du *P. glaucum*, plusieurs noyaux solides; leur diamètre est de 0^{mm},005 à 0^{mm},006, pour une longueur six à dix fois plus grande. En se développant, ces flocons se rejoignent et s'enchevêtrent pour former une masse assez irrégulière qui continue de s'accroître sur toute sa périphérie. C'est sous cette forme stérile et profonde, où elle ne respire que par l'oxygène dissous, que la plante agit comme ferment pour dédoubler le tannin en acide gallique et en glucose.

Les flocons qui se développent à la surface sont d'abord hémisphériques, puis ils s'étalent en disques qui s'accroissent concentriquement, de telle sorte que, s'il y a des variations dans la température, et, par suite, dans la vitesse d'accroissement périphérique, ces variations sont inscrites sur le disque par des cercles concentriques. Bientôt ces ilots se rencontrent, s'enchevêtrent et constituent en définitive une membrane continue. C'est perpendiculairement à la surface des disques que s'élèvent les filaments réceptaculaires. Ceux-ci sont simples, unicellulaires, cylindriques, géniculés à la base où ils s'insèrent à la fois par leur extrémité et par le point d'inflexion sur le filament horizontal du mycélium qui les porte; ils sont remplis par un protoplasma finement granuleux qui se colore en jaune à la maturité; leur membrane, mince

d'abord, s'épaissit fortement plus tard; leur diamètre, double ou triple de celui des cellules du mycélium, varie de $0^{\text{mm}},011$ à $0^{\text{mm}},016$; ils atteignent souvent 1 millimètre de hauteur. Ils parviennent à leur longueur totale en restant cylindriques, puis leur extrémité se renfle en un capitule sphérique d'abord lisse, mais dont la surface se couvre bientôt de sortes de verrues contiguës les unes aux autres, qui, en s'allongeant, forment des basides rayonnantes extrêmement serrées, implantées sur la face externe du capitule dont la paroi fortement épaissie laisse voir deux couches très-distinctes. Ces basides sont très-étroites, $0^{\text{mm}},0025$, mais leur longueur atteint $0^{\text{mm}},012$ à $0^{\text{mm}},015$, c'est-à-dire trois à quatre fois le diamètre des spores qu'elles portent; incolores d'abord, elles sont d'un jaune brun à la chute des spores. Chacune de ces basides développe par segmentation de son extrémité un chapelet de spores qui, d'un jaune citron d'abord, passent rapidement au brun chocolat de plus en plus foncé, et quelquefois au noir; ces chapelets rayonnants sont réunis d'abord latéralement en un faisceau unique qui se brise ensuite en faisceaux prismatiques distincts; ils s'isolent plus tard, et les spores elles-mêmes se détachent et tombent. Ces spores sphériques demeurent assez longtemps lisses; elles sont déjà d'un brun chocolat foncé qu'on trouve encore leur contour circulaire; mais au moment d'atteindre leur maturité, elles se hérissent de nombreuses aspérités, qui les font ressembler à celles de l'*Aspergillus glaucus*. Elles dégagent une forte odeur d'encre de Chine, qui paraît plus forte dans le cours de leur développement qu'après leur maturité complète. Leur diamètre est de $0^{\text{mm}},004$ à $0^{\text{mm}},005$.

L'*Aspergillus glaucus* n'a pas le réceptacle géniculé vers sa base; ses basides sont très-courtes et ovoïdes, et ses spores vertes, près de quatre fois plus grosses, atteignent, d'après Corda, $0^{\text{mm}},017$.

Notre plante apparaît spontanément, avec ou sans le *Penicillium glaucum*, sur les infusions de noix de galle ou sur les dissolutions de tannin abandonnées au contact de l'air. Dans les expériences qui font l'objet de ce Mémoire, j'ai dû surtout me préoccuper de la semer et de la cultiver, soit dans des infusions de noix de galle, soit dans des dissolutions de tannin contenant en outre du nitrate d'ammoniaque et des cendres de bois ou de levûre. Mais je l'ai semée aussi, cultivée et récoltée en grande quantité et avec tous ses caractères, dans les milieux

les plus divers : sur du pain mouillé, sur des tranches de citron et d'orange, sur de l'urine demeurée acide, sur des feuilles mortes, etc.; enfin sur différents milieux artificiels où le sucre, l'acide tartrique libre et le bitartrate d'ammoniaque servaient tour à tour d'aliment hydrocarboné à la plante.

C'est donc une espèce qui s'accommode aux conditions de milieu les plus diverses et qui est par conséquent très-répandue dans la nature. C'est elle encore, comme nous nous en sommes assurés ensemble par une comparaison attentive, que, depuis plusieurs années, M. Raulin sème, cultive et récolte en grande abondance sur des milieux artificiels définis et de constitution variée, dans cette belle série de recherches sur les principes minéraux nécessaires à la végétation des Mucédinées dont les premiers résultats ont été publiés en 1863 (*Comptes rendus*, t. LVII, p. 228), et dont l'exposé complet ne tardera pas à paraître.

Les caractères de notre espèce étant ainsi reconnus fixes et indépendants de la nature du milieu, il nous reste à examiner si elle est réellement nouvelle.

C'est la couleur des spores qui a prévalu dans la dénomination des *Aspergillus*; ainsi on a les *Aspergillus candidus*, *flavus*, *aurantiacus*, *ferugineus*, *virens*, *glaucus*, *roseus*, etc.; c'est cette circonstance qui m'a guidé dans l'appellation de l'espèce nouvelle. Deux *Aspergillus* à spores noirâtres ont été cependant décrits, l'un par M. Ch. Robin, en 1848, sous le nom d'*Aspergillus nigrescens* (*Hist. nat. des végétaux parasites*, p. 518 et *Pl. V*, *fig. 2*), l'autre tout récemment, en 1867, par M. Robert Wreden, sous celui d'*Aspergillus nigricans* (*Comptes rendus*, t. LXV, p. 368).

M. Ch. Robin a rencontré l'*Aspergillus nigrescens* sur des productions morbides tapissant les sacs aériens d'un faisan phthisique. Le filament réceptaculaire y est formé d'une série de cellules articulées bout à bout, caractère qui rapproche cette espèce des *Aspergillus ovalispermus*, *macrosporus* et *griseus*, en l'éloignant des *Aspergillus glaucus* et *mucoroides*; les spores sont lisses et plus petites; les cellules du mycélium ont un diamètre moitié plus faible (0^{mm},002 à 0^{mm},003), et elles contiennent chacune plusieurs noyaux solides. Ces caractères paraissent établir que cette espèce est bien distincte de la nôtre. Mais peut-être n'en est-elle qu'une variété déterminée par les conditions si particulières du milieu

animal où la plante se développait; la culture seule du parasite sur les milieux végétaux ordinaires, ou sur des milieux artificiels, pourrait résoudre cette question.

D'autre part, M. Wreden, en étudiant une affection particulière et très-opiniâtre de l'oreille humaine, a observé le développement sur la membrane du tympan de deux nouvelles formes d'*Aspergillus* parasites, qui ne diffèrent de l'*Aspergillus glaucus*, dont elles possèdent tous les autres caractères, que par la couleur des spores : il les appelle *Aspergillus flavescens* et *nigricans*. Mais, en semant ces deux sortes de spores sur des tranches d'orange ou de citron, l'auteur les a vues germer et reproduire en tous points l'*Aspergillus glaucus* avec la couleur verte ordinaire de ses spores. Ces parasites ne sont donc pas des espèces autonomes, mais de simples variétés de l'*Aspergillus glaucus*, produites par les caractères particuliers du milieu animal dans lequel elles croissent.

Nous savons qu'il est loin d'en être de même de notre *Aspergillus niger*, dont l'autonomie spécifique se trouve ainsi bien établie, mais qui cependant, par l'ensemble de ses caractères, me paraît se rapprocher de l'*Aspergillus glaucus* plus que d'aucune autre espèce du même genre.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt de remarquer, en terminant, que M. Wreden, pour arriver à guérir la maladie que la végétation des *Aspergillus* détermine dans l'oreille humaine, a étudié l'action qu'exercent sur ces végétaux divers agents chimiques. Parmi les meilleurs parasitocides, l'auteur range, à côté de l'acide phénique, le *tannin*. « Ce corps, dit-il, détermine en premier lieu la coagulation du protoplasma et, consécutivement, une sorte de momification très-remarquable de tout le végétal. » Ce résultat ne laissera pas que de paraître étrange si l'on se rappelle avec quelle rapidité, avec quelle énergie notre *Aspergillus niger* se développe dans les dissolutions de tannin, même les plus concentrées, et l'étonnement ne diminuera pas si j'ajoute qu'il m'est arrivé à plusieurs reprises d'observer, dans ce même milieu, l'apparition accidentelle de quelques îlots d'*Aspergillus glaucus* égarés au milieu d'une couche compacte de *Penicillium glaucum*.

SUR UN MODE DE TRANSFORMATION DES FIGURES

ET SON APPLICATION

A LA CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU DEUXIÈME ORDRE
DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS,

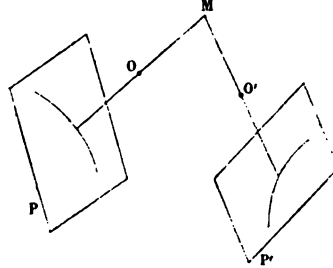
PAR G. DARBOUX,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.



I.

Soient deux points O, O' pris sur une surface du second ordre (*fig. 1*).
Par ces deux points menons deux droites $OM, O'M$ se coupant sur la
surface. Il est clair qu'à une droite OM correspondra en général une

Fig. 1.



droite $O'M$ et une seule, en sorte qu'à un cône ayant le point O pour
sommet correspondra un cône ayant le point O' pour sommet et ces deux
cônes couperont suivant la même ligne la surface du second ordre.

Maintenant faisons correspondre au point O un plan fixe P , et au

point O' un plan fixe P' . Tout cône ayant son sommet en O sera coupé par le plan P suivant une ligne, et le cône correspondant ayant son sommet au point O' sera coupé suivant une autre ligne par le plan P' . Ces deux lignes, situées dans les plans P, P' , peuvent être considérées comme correspondantes, et l'on obtient ainsi un mode de transformation des figures planes, dans lequel à un point de l'une des figures correspond un seul point de l'autre.

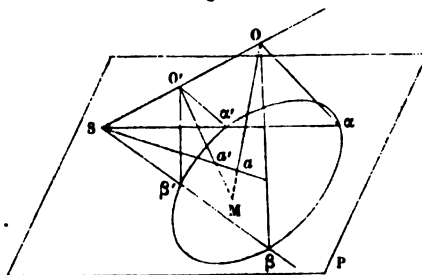
Pour déterminer la propriété fondamentale de ce mode de transformation, nous remarquerons qu'à une droite dans le plan P correspond une conique dans le plan P' , et réciproquement. En effet, par le point O et par la droite faisons passer un plan, ce plan coupera la surface du second ordre suivant une conique; le cône ayant son sommet en O' et passant par cette conique sera du second ordre et coupera le plan P' suivant une conique correspondant à la droite considérée. On a donc la réalisation géométrique du mode de transformation étudié pour la première fois par Magnus (*Journal de Crelle*, t. IV), dans lequel à un point répond un seul point et à une droite répond une conique. M. Transon, dans deux articles très-intéressants des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, avait montré que la *projection gauche* d'une figure réalise ce mode de transformation. M. Hirst l'a étudié au moyen de la théorie des faisceaux homographiques. Le nouveau mode que je propose permet de réaliser la transformation la plus générale considérée par Magnus, puisqu'il y a neuf constantes dans l'équation de la surface, six dans celles des deux plans, et qu'on peut prendre arbitrairement sur la surface les points O, O' .

Si, laissant invariables les autres parties de la figure, on déplace le plan P' , toutes les figures obtenues dans les différents plans P' seront les perspectives les unes des autres, puisque ce sont des sections planes de cônes ayant leurs sommets en O' . On pourra donc faire coïncider le plan P et le plan P' , et même prendre une position particulière du plan P . Les résultats les plus généraux se déduiraient de ceux que nous obtiendrons ainsi, en faisant la perspective de l'une ou des deux figures correspondantes.

Soit S (*fig. 2*) le point de rencontre de la droite OO' et du plan P . Un point M de la surface du second ordre donnera deux points α, α' situés sur une droite passant par le point S . Ces deux points coïncideront quand

le point M sera dans le plan P , et, par suite, le lieu des points qui coïncident avec leurs homologues est la section de la surface dans le plan P . Les points α, α' forment sur chaque droite Saa' des divisions homographiques dont les points doubles sont les intersections de la droite et de la conique que j'appellerai *conique principale*.

Fig. 2.



A un point α ne correspond en général qu'un point α' , parce que la droite $O\alpha$ ne coupe la surface qu'en un point. Mais si la droite $O\alpha$ est située tout entière sur la surface, à un point α correspondent une infinité de points α' en ligne droite.

Considérons les plans tangents à la surface en O et en O' ; ils coupent la surface suivant des droites $O\alpha, O\beta, O'\alpha', O'\beta'$. $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ désignent les intersections de ces droites par le plan P . Il est clair que les droites $\alpha\alpha', \beta\beta'$ vont passer par le point S .

Au point α considéré comme appartenant à la première figure correspondent tous les points de la droite $S\alpha$, etc. On peut donc former le tableau suivant :

Première figure.	Deuxième figure.	Deuxième figure.	Première figure.
Points α	Droites $S\alpha'$	Points α'	Droites $S\alpha$
» β	» $S\beta'$	» β'	» $S\beta$
» S	» $\alpha'\beta'$	» γ'	» $\alpha\beta$

Donc, à toute droite de la première figure, correspond une conique passant par les trois points α', β', S et par les deux points d'intersection de la droite et de la conique principale; et réciproquement, à toute droite de la seconde figure correspond, dans la première, une conique passant par les points α, β, S .

Voici du reste un tableau, s'appliquant à toutes les courbes, et que

nous empruntons à l'article de M. Hirst. Désignons par n, n' les ordres des courbes correspondantes, par a, b, s, a', b', s' le nombre de fois qu'elles passent la première par les points α, β, S , la seconde par les points α', β', S . On a

$$\begin{aligned} a' &= n - a - s, & a &= n' - a' - s', \\ b' &= n - b - s, & b &= n' - b' - s', \\ s' &= n - a - b, & s &= n' - a' - b', \\ n' &= 2n - a - b - s, & n &= 2n' - a' - b' - s'. \end{aligned}$$

Comme application considérons une droite passant par le point α

$$n = 1, \quad a = 1, \quad b = 0,$$

on trouve

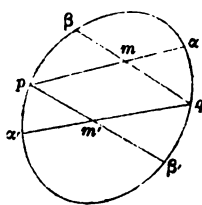
$$n' = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 1, \quad s' = 0.$$

Ainsi à ces droites passant par le point α correspondent des droites passant par le point β' , ce qui du reste est évident géométriquement.

Il suffit de considérer une génératrice rectiligne de la surface. Si l'on fait passer des plans par cette génératrice et par les points O, O' , ils couperont le plan P suivant les deux droites correspondantes $\alpha p, \beta' p$. Ces droites se couperont en p , trace de la génératrice rectiligne sur la conique principale.

Il résulte de là un moyen très-simple de trouver, par des constructions effectuées dans le plan, l'homologue d'un point. Soit en effet un point m (*fig. 3*). A la droite αm correspond la droite $\beta' p$ venant couper

Fig. 3.



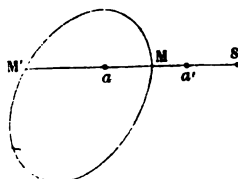
la première au point p situé sur la conique principale. De même à la droite βm correspond la droite $\alpha' q$. Le point d'intersection m' des droites $\alpha' q, \beta p$ est donc l'homologue du point m , et la droite mm' devra aller passer par le point S .

Considérons maintenant deux courbes correspondantes passant l'une au point m , l'autre au point m' . Il sera facile de déduire la tangente en m' de la tangente en m . Soit en effet le point M de la surface qui fournit le couple de points homologues m, m' . Dans le voisinage de ce point M , on peut remplacer la surface par son plan tangent. Ce plan tangent, déterminé par les deux génératrices Mp, Mq , a pour trace pq . A une droite passant par le point M et située dans le plan tangent, correspondront deux droites passant par les points m, m' et se coupant sur la droite pq , et lorsqu'on aura l'une d'elles on déterminera l'autre immédiatement. Ainsi les tangentes aux points correspondants m, m' vont se rencontrer sur la droite pq .

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce mode de transformation des figures. Il a été étudié par plusieurs géomètres, mais le nouveau moyen que nous proposons pour le réaliser nous paraît offrir un avantage. On peut se rendre compte, géométriquement et sans difficulté, de tous les cas particuliers que présente la transformation de Magnus.

Ainsi M. Hirst a étudié très-complètement l'inversion quadratique. C'est une généralisation de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. On considère un point S et une conique. Par le point S (*fig. 4*) on mène une sécante MM' et on prend deux points a, a'

Fig. 4.



conjugués harmoniques par rapport aux points M, M' . Au point a correspond le point a' , et inversement au point a' le point a . Pour obtenir cette méthode de transformation nous n'aurons qu'à prendre pour plan P le plan polaire d'un point de la droite oo' . Alors deux points correspondants a, a' forment une involution sur aa' et on a bien l'inversion quadratique telle qu'elle a été proposée par M. Hirst.

Par exemple, si l'on prend une sphère, deux points o, o' à l'extrémité d'un diamètre et pour plan P un plan perpendiculaire à oo' , on obtient la transformation par rayons vecteurs réciproques.

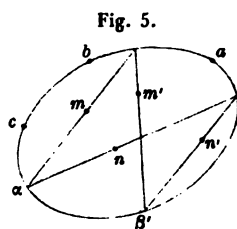
II.

CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU DEUXIÈME ORDRE DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS.

1. *Construction de la surface du deuxième ordre passant par une droite (o) et par six points o', a, b, c, M, N .*

Nous prenons pour les pôles de transformation un point o situé sur la droite (o) et le point o' ; pour plan P de la transformation nous prenons le plan des trois points a, b, c . La question est donc ramenée à la suivante :

Déterminer les éléments de la transformation, connaissant le point α [où la droite (o) rencontre le plan P], trois autres points a, b, c de la conique principale, et deux couples correspondants m, m', n, n' (fig. 5).



Remarquons qu'aux droites $\alpha m, \alpha n$ doivent répondre des droites allant se couper en un point β' de la conique principale. Ces droites doivent d'ailleurs passer par les points m', n' . Il faut donc résoudre le problème suivant :

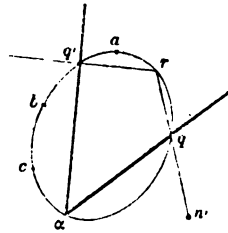
Mener par quatre points fixes a, b, c une conique rencontrant les droites fixes $\alpha m, \alpha n$ en des points tels, que, si l'on joint ces deux points aux deux points donnés m', n' , les droites de jonction aillent se couper sur la conique.

Ce problème se résout avec une grande facilité de la manière suivante :

Si l'on considère une des coniques passant par quatre points fixes et coupant les droites fixes en q, q' , la droite $n'q$ ira couper la conique en un point r variable, et la droite rq' menée par les deux points mobiles r, q' ira passer par un point fixe.

Ce point fixe se détermine avec la règle, il suffit de prendre parmi les coniques variables celles qui se réduisent à des droites.

Fig. 6.



D'après cela, la droite $q'r$ (fig. 6) devant passer par ce point fixe et par un autre point fixe m' , est complètement déterminée; le point q' donne un cinquième point de la conique principale.

La conique principale étant déterminée, le problème ne présente plus de difficulté. On a une droite, une conique de la surface et deux points, et par conséquent cinq points de toute section plane contenant les deux points.

2. Construire la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points quelconques.

On sait que toutes les surfaces, passant par huit points, se coupent suivant une ligne du quatrième ordre, et, par suite, que leurs sections par un plan fixe passent toutes par quatre points de ce plan. Soit en particulier le plan P, contenant trois des huit points a, b, c : les sections des surfaces par ce plan se coupent aux trois points a, b, c et en un quatrième point qui est inconnu. Supposons que l'on sache déterminer ce quatrième point; alors, si des neuf points donnés, on retranche successivement deux points, on aura deux systèmes de huit points qui fourniront dans le plan P deux points x, y . La conique des cinq points a, b, c, x, y appartiendra donc à la surface cherchée, et le problème pourra être considéré comme résolu. Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

Étant donnés huit points, déterminer dans le plan de trois d'entre eux le quatrième point qui appartient à toutes les surfaces du second degré passant par les huit points.

Ce problème se résout au moyen du premier, on n'a qu'à considérer deux surfaces particulières passant par six des huit points et par la ligne qui joint les deux autres, et il ne reste plus qu'à résoudre le problème connu :

Étant données deux coniques déterminées par cinq points et ayant trois points communs, déterminer leur quatrième point d'intersection, ce qui se fait avec la règle.



MÉMOIRE

SUR

LA ROTATION DE LA LUNE

(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. CH. SIMON,
PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

•

—•—

Dans ce second Mémoire (*), je me propose un double objet :

1° Déterminer exactement les conditions initiales auxquelles la Lune a dû satisfaire, pour que son mouvement de rotation devint tel que nous l'observons;

2° Faire voir avec précision, en ayant égard à tous les faits et en respectant les lois de la Mécanique, que ces conditions sont des conséquences naturelles de la célèbre hypothèse qui termine l'*Exposition du système du monde*.

Je ne me propose rien de plus. En étudiant le phénomène de la libration réelle en latitude, j'ai rencontré, sans la chercher, une équation de condition, de forme assez compliquée, qui se rapporte à l'état initial, et qui doit être satisfaite dans toute hypothèse qu'on voudra imaginer : il était naturel d'examiner si elle est ou non satisfaite dans l'hypothèse la plus célèbre et la plus autorisée. C'est un exercice intéressant d'analyse mathématique, et je n'y vois pas autre chose. Je ne me crois pas obligé de prendre parti pour ou contre la théorie cosmogonique de Laplace; je ne cherche pas plus à la confirmer qu'à l'é-

(*) Voyez un premier Mémoire sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude, inséré dans le tome III des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*.

branler. Il est vrai que j'ai été conduit, par la nature de mon sujet, à discuter la principale objection qu'on a élevée contre cette théorie, à savoir : la grande inclinaison des équateurs de plusieurs planètes sur le plan du maximum des aires ; et l'on comprend que si cette objection m'avait paru insurmontable mon travail n'aurait pas eu de base. Mais je n'ai pas la prétention d'embrasser la question dans son ensemble et de rendre compte de toutes les particularités que présente le système solaire : je désire me renfermer strictement dans le problème spécial et nettement défini que j'ai indiqué.

I. — *Des conditions initiales du mouvement de rotation de la Lune.*

Si l'on fait abstraction des oscillations périodiques, qui ne dépendent pas de l'état initial, le phénomène de la rotation de la Lune reste assujéti à ces deux lois remarquables : 1° que le mouvement de rotation est constamment égal au moyen mouvement de rotation ; 2° que le nœud ascendant de l'équateur coïncide constamment avec le nœud descendant de l'orbite. Voyons quelles sont les conséquences qui résultent de ces deux lois, relativement à l'état initial.

De la première loi on conclut qu'à l'origine du mouvement la vitesse de rotation a dû être égale à la vitesse moyenne de révolution, et que le grand axe du sphéroïde lunaire a dû être dirigé vers la position moyenne de la Terre, sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si ces conditions n'eussent pas été remplies, on sait, par la théorie de la libration en longitude, que l'expression de cette libration renfermerait un terme de la forme (*)

$$u = Q \sin \left(nt \sqrt{3 \frac{B-A}{C}} + F \right);$$

où Q et F désignent deux constantes arbitraires ; A, B, C, les moments principaux d'inertie du sphéroïde lunaire, rangés par ordre de grandeurs croissantes ; n le moyen mouvement de rotation ou de révolution,

(*) *Mécanique céleste*, livre V, n° 16.

et t le temps. Il en résulterait, dans le mouvement du grand axe du sphéroïde lunaire par rapport au rayon vecteur mené vers la position moyenne de la Terre, une oscillation d'amplitude arbitraire, dont la période serait égale à

$$\frac{27,3215}{\sqrt{3 \frac{B-A}{C}}} \text{ jours;}$$

ou à 665 jours environ, en supposant, d'après Nicollet,

$$3 \frac{B-A}{C} = 0,00169.$$

Or l'observation n'a constaté, dans la libration en longitude, aucune période de ce genre.

L'interprétation de la seconde loi exige un peu plus de développements. Appelons θ l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan de l'écliptique, γ l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire sur le même plan, ψ la longitude du nœud ascendant de l'équateur à partir d'une droite fixe, ω la longitude moyenne du nœud descendant de l'orbite à partir de la même droite; et enfin désignons par h un angle déterminé par l'équation

$$(1) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{h}\right),$$

dans laquelle on regarde comme données les quantités n , γ , $\frac{C-A}{B}$ et $\frac{d\omega}{dt}$. En dépouillant ψ et θ des termes périodiques qui proviennent de la longitude sélénocentrique de la Terre et de l'excentricité de l'orbite, nous avons trouvé, dans notre premier Mémoire,

$$(2) \quad \begin{cases} \omega - \psi = \frac{H}{h} \cos \left(\frac{3n\gamma}{2h} \frac{C-A}{B} t + \eta \right), \\ \theta - h = H \sin \left(\frac{3n\gamma}{2h} \frac{C-A}{B} t + \eta \right), \end{cases}$$

H et η étant des constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial. On voit par ces formules que les positions moyennes du nœud descendant de l'orbite et du nœud ascendant de l'équateur coïncident rigou-

reusement, et que la valeur moyenne de θ est rigoureusement égale à la valeur de h qui satisfait à l'équation (1); mais on voit en même temps que le nœud ascendant de l'équateur oscille de part et d'autre du nœud descendant de l'orbite, et que l'inclinaison θ oscille en deçà et au delà de h .

Si l'on prend pour origine du temps l'instant d'une coïncidence des nœuds, et si l'on désigne par θ_0 la valeur de θ à cet instant, les constantes H et η sont déterminées, et les formules (2) deviennent

$$(3) \quad \begin{cases} \omega - \psi = -\frac{\theta_0 - h}{h} \sin\left(\frac{3n\gamma}{2h} \frac{C-A}{B} t\right), \\ \theta - h = +(\theta_0 - h) \cos\left(\frac{3n\gamma}{2h} \frac{C-A}{B} t\right). \end{cases}$$

L'amplitude des oscillations que ces formules indiquent est proportionnelle à la différence $(\theta_0 - h)$; quant à leur durée, elle a pour expression

$$\frac{4\pi h}{3n\gamma \frac{C-A}{B}},$$

ce qui donne environ 8740 jours, d'après le Mémoire déjà cité. Mais comme les observations n'ont fait connaître, ni dans l'inclinaison, ni dans la position des nœuds de l'équateur lunaire, aucune période de ce genre, il faut admettre qu'on a, sinon rigoureusement, du moins à très-peu près,

$$\theta_0 = h,$$

et par suite

$$\theta = h,$$

$$\psi = \omega.$$

Nous avons démontré d'ailleurs que la coïncidence du nœud descendant moyen de l'orbite avec le nœud ascendant moyen de l'équateur étant une fois établie, cette coïncidence se maintiendra indéfiniment, malgré les variations périodiques ou séculaires que les forces perturbatrices pourront introduire dans les éléments n , γ , θ et $\frac{d\omega}{dt}$. Concluons donc qu'au moment où la coïncidence des nœuds s'est établie la valeur de θ a dû être égale à la valeur de h que détermine l'équation (1); ou,

en d'autres termes, que les éléments n , γ , θ et $\frac{d\omega}{dt}$, ont dû, à ce moment, satisfaire à l'équation

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right),$$

sinon rigoureusement, du moins à très-peu près. Car, si cette condition n'eût pas été à très-peu près remplie, les oscillations indiquées par les formules (3) seraient sensibles.

Nous avons donc déduit de l'observation et de la théorie des conditions nettement définies, qui doivent être satisfaites dans toute hypothèse cosmogonique; il nous reste à examiner si elles sont satisfaites dans l'hypothèse de Laplace. Mais, avant d'entrer dans cette discussion, il est nécessaire de remarquer que la Lune est loin d'avoir la figure qu'elle aurait si elle eût été primitivement fluide. En effet, si la Lune eût été primitivement fluide, elle eût pris, sous la double influence de son mouvement de rotation et de l'attraction de la Terre, la figure d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, ayant son grand axe dirigé vers la Terre, ce qui s'accorde avec les faits observés; mais en même temps on trouve, par un calcul fort simple (*), que le coefficient $\frac{C-A}{B}$ eût acquis une valeur tout au plus égale à 0,00004052; tandis que, selon les observations, la valeur de ce coefficient est 0,000597, c'est-à-dire environ quinze fois trop forte. A la vérité l'on pourrait imaginer que la Lune ayant été primitivement fluide, sa figure ait changé par suite d'éruptions volcaniques, de soulèvements ou d'affaissements de montagnes; mais cela reviendrait à ajouter une nouvelle hypothèse à celle que nous voulons examiner, et, comme cette nouvelle hypothèse est inutile, nous nous abstiendrons de l'introduire.

II. — De l'hypothèse de Laplace.

Considérons la Terre à l'époque où son atmosphère s'étendait au delà de l'orbite actuelle de la Lune. La Terre décrivait alors autour du Soleil

(*) *Mécanique céleste*, livre V, n° 18. Laplace suppose le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune égal à 59; nous l'avons supposé égal à 84.

une orbite de même grand axe que l'orbite actuelle, à peu près de même excentricité et à peu près dans le même plan. Elle était animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe incliné sur l'axe de l'écliptique d'une quantité arbitraire que nous désignerons par θ ; de cette rotation résultait un aplatissement, et de cet aplatissement un mouvement de précession que nous allons calculer. Pour cela nous aurons recours à des formules que M. Liouville a données dans la *Connaissance des Temps* pour 1859. Quand on considère un système quelconque de points matériels sollicités par des forces quelconques, on peut toujours concevoir à un instant donné l'ellipsoïde des moments d'inertie, ayant pour centre le centre de gravité du système. Cet ellipsoïde change continuellement de position et de forme, de sorte qu'au bout du temps infiniment court dt les axes principaux OX_1, OY_1, OZ_1 , ont pris une position infiniment voisine OX', OY', OZ' , tandis que les moments principaux d'inertie A, B, C , ont augmenté de $\frac{dA}{dt} dt, \frac{dB}{dt} dt, \frac{dC}{dt} dt$; mais, quels que soient ces changements, on peut toujours passer de la première position à la seconde par trois rotations infiniment petites $p dt, q dt, r dt$, exécutées autour des axes OX_1, OY_1, OZ_1 , et les quantités p, q, r sont liées aux variations des trois angles φ, ψ, θ , qui déterminent la position des axes mobiles par rapport à trois axes fixes, par les relations connues

$$(5) \quad \begin{cases} d\theta = p dt \cos \varphi - q dt \sin \varphi, \\ \sin \theta d\psi = p dt \sin \varphi + q dt \cos \varphi, \\ d\varphi = r dt - \cos \theta d\psi. \end{cases}$$

M. Liouville s'est proposé d'établir entre les quantités p, q, r et le temps trois équations différentielles, pour tenir lieu de celles qu'Euler a données le premier dans le cas d'un système de figure invariable.

Les formules générales auxquelles M. Liouville est parvenu sont compliquées, mais elles se simplifient beaucoup lorsque le système reste constamment symétrique par rapport aux trois plans de ses axes principaux. Nous admettrons que la Terre, à l'époque où elle était fluide, satisfaisait à cette condition, et nous supposerons de plus que sa figure était de révolution. Si nous appelons P, Q, R , les couples accélérateurs dus à l'action du Soleil, les formules de M. Liouville de-

viendront

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d(Ap)}{dt} + (C - A)qr = P, \\ \frac{d(Aq)}{dt} - (C - A)pr = Q, \\ \frac{d(Cr)}{dt} = R. \end{cases}$$

Or, on a évidemment $R = 0$, et par suite

$$Cr = \text{const.} = F.$$

On trouve ensuite, en désignant par n' le moyen mouvement géocentrique du Soleil, et en supprimant les termes qui dépendent de la longitude de cet astre,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{3}{2} n'^2 (C - A) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \\ Q &= +\frac{3}{2} n'^2 (C - A) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

On peut admettre que l'aplatissement est proportionnel au carré de la vitesse de rotation, et poser

$$A = C(1 - \epsilon r^2), \quad C - A = \epsilon Cr^2,$$

ϵ désignant un coefficient positif très-petit. Si l'on néglige les termes qui sont multipliés par le produit des trois facteurs très-petits ϵ , $\frac{dr}{dt}$, p ou q , les deux premières équations (6) prennent la forme

$$(7) \quad \begin{cases} (1 - \epsilon r^2) \frac{d(Cp)}{dt} = -\epsilon r^2 (Cq) - \frac{3}{2} n'^2 \epsilon F r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \\ (1 - \epsilon r^2) \frac{d(Cq)}{dt} = +\epsilon r^2 (Cp) + \frac{3}{2} n'^2 \epsilon F r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi. \end{cases}$$

Pour les intégrer (abstraction faite des termes qui dépendent de l'état initial), supposons $d\varphi = r dt$, et faisons

$$\begin{aligned} Cp &= \frac{3}{2} n'^2 F (M \sin \varphi - N \cos \varphi), \\ Cq &= \frac{3}{2} n'^2 F (M \cos \varphi + N \sin \varphi); \end{aligned}$$

M et N étant des fonctions de r et de θ , qui devront satisfaire aux équations différentielles

$$\begin{aligned} Mr - \frac{dN}{dt} (1 - \varepsilon r^2) + \varepsilon r \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ Nr + \frac{dM}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

On aura ensuite, par les deux premières formules (5),

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{3}{2} n'^2 N r, \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= +\frac{3}{2} n'^2 M r. \end{aligned}$$

On satisfait à ces équations en posant

$$N = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad M = -\varepsilon \sin \theta \cos \theta,$$

et il serait aisé de faire voir qu'on ne peut pas y satisfaire autrement. On a donc

$$(8) \quad \begin{cases} \theta = \text{const.}, \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} n'^2 \varepsilon r \cos \theta. \end{cases}$$

Ainsi, l'inclinaison moyenne de l'équateur sur l'écliptique reste constante, mais la vitesse du mouvement de précession croît en même temps que la rotation.

Or, dans la conception de Laplace, la Terre (pour ne parler que de cette seule planète) étant issue du Soleil, les équateurs de ces deux astres ont dû être primitivement peu inclinés sur le plan du maximum des aires, et par suite sur le plan de l'écliptique. Nous venons de voir que l'inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique ne change pas par le seul fait de la condensation; la grandeur de l'inclinaison actuelle paraît donc inexplicable. Si cette objection était insoluble, l'hypothèse de Laplace devrait être rejetée.

Mais les résultats précédents se rapportent à l'époque où toute la matière qui constitue aujourd'hui la Terre formait une seule masse fluide. Le mouvement de rotation continuant à s'accélérer, il a du ar-

river plusieurs fois que la force centrifuge à l'équateur ait fait équilibre à la pesanteur; la Terre a dû abandonner successivement, dans le plan de son équateur, plusieurs zones ou anneaux de vapeurs dont nous ne retrouvons plus la trace. Sous des conditions très-particulières, il aurait pu se faire que chacune de ces zones eût acquis une figure permanente : les anneaux de Saturne nous offrent un exemple curieux de ce phénomène. Sous d'autres conditions, chaque zone s'étant rompue en plusieurs fragments aurait donné naissance à autant de satellites, qui eussent continué à circuler autour de la planète dans des orbites peu différentes les unes des autres : telle est peut-être l'origine des nombreux astéroïdes qui circulent autour du Soleil entre Mars et Jupiter. Mais la constitution générale du système du monde prouve que ces circonstances ne se sont présentées qu'exceptionnellement. On ne peut pas supposer en général que chacune des molécules qui constituent un anneau fluide se comporte comme si elle était soumise uniquement aux actions de la pesanteur, et l'on se rapprochera davantage des conditions de la nature en imaginant que chaque anneau se contracte en se refroidissant (à peu près comme ferait un anneau solide, qu'on aurait porté d'abord à une haute température, et qu'on abandonnerait ensuite dans une enceinte de température basse et constante), et qu'il finit par se précipiter à la surface de la planète (*). Étudions dans cette hypothèse le mouvement d'un pareil anneau.

Nous ne pouvons pas appliquer la théorie précédente au système formé par le noyau central et par ses anneaux, parce qu'il ne serait plus permis de supposer $\frac{C-A}{C}$ proportionnel à r^2 ; mais nous pouvons encore appliquer les formules (6) à chaque anneau considéré séparément, et troublé par le Soleil. La troisième de ces formules donne d'abord

$$Cr = \text{const.} = F.$$

Bien que chaque zone, vue du centre de la Terre, puisse avoir plusieurs degrés de largeur, il est permis, lorsqu'on ne se préoccupe que des

(*) Les plus récentes observations des anneaux de Saturne semblent confirmer cette manière de voir.

résultats moyens, de la traiter comme un anneau très-mince. Nous aurons donc

$$C = 2A, \quad C - A = A = \frac{F}{2r},$$

et les deux premières équations (6) deviendront

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{dt} = -q - \frac{3}{2}n'^2 \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \cos\varphi, \\ \frac{d\left(\frac{q}{r}\right)}{dt} = +p + \frac{3}{2}n'^2 \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \sin\varphi. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= \frac{3}{2}n'^2(M \sin\varphi - N \cos\varphi), \\ \frac{q}{r} &= \frac{3}{2}n'^2(M \cos\varphi + N \sin\varphi), \end{aligned}$$

les fonctions M et N devront satisfaire aux équations différentielles

$$(10) \quad \begin{cases} 2Mr - \frac{dN}{dt} + \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} = 0, \\ 2Nr + \frac{dM}{dt} = 0; \end{cases}$$

et le mouvement de précession de l'anneau que nous considérons sera déterminé par les formules

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}n'^2 Nr = +\frac{3}{4}n'^2 \frac{dM}{dt}, \\ \sin\theta \frac{d\psi}{dt} = +\frac{3}{2}n'^2 Mr. \end{cases}$$

Si l'on suppose d'abord cet anneau de figure invariable, r est constant, et l'on tire des équations (10) et (11)

$$\begin{aligned} N &= 0, \\ M &= -\frac{\sin\theta \cos\theta}{2r^2} = \text{const.}, \\ \theta &= \text{const.}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{3}{4}n'^2 \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces formules représentent le mouvement de précession de l'orbe d'un satellite dont la moyenne distance à la planète serait égale au rayon de l'anneau, pourvu toutefois que, si l'on appelle a cette moyenne distance et m la masse de la Terre, on ait $r^2 a^3 = fm$. Pour appliquer ces formules à l'orbe lunaire, il suffirait d'y remplacer, d'après les notations que nous avons adoptées, θ par γ , ψ par ω , r par n , et d'y supposer $\cos \gamma = 1$. On aurait ainsi

$$(12) \quad \begin{cases} \gamma = \text{const.}, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n}, \end{cases}$$

ce qui s'accorde avec les résultats de la *Mécanique céleste*. Si nous avons conservé les termes qui dépendent de la longitude du Soleil, en appelant ν' cette longitude comptée du nœud ascendant de l'anneau, nous aurions obtenu les formules connues

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} \gamma \sin 2\nu', \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} (1 - \cos 2\nu'), \end{cases}$$

et nous aurions retrouvé ainsi la nutation de Tycho-Brahé.

Lorsque l'anneau se contracte en se refroidissant, r croît avec le temps, et l'on ne peut plus satisfaire aux équations (10) et (11) dans l'hypothèse d'une inclinaison constante; car cette hypothèse entraîne

$$N = 0, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \quad M = \text{const.},$$

et d'autre part la première équation (10) donne

$$M = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{2r^2},$$

ce qui est contradictoire. Ainsi la dérivée $\frac{dM}{dt}$ n'est pas nulle. Pour reconnaître son signe, observons que, si la vitesse de rotation était constante, on aurait $M = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{2r^2}$; on peut donc admettre que l'expres-

sion générale de M se compose de ce premier terme, qui subsiste seul lorsque r est constant, et d'une suite de termes qui deviennent nuls avec $\frac{dr}{dt}$. On a donc

$$M = -\frac{\sin 2\theta}{4r^2} + \frac{dr}{dt}f(r, \theta);$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes du second ordre devant ceux du premier,

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\cos 2\theta}{2r^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \frac{dr}{dt};$$

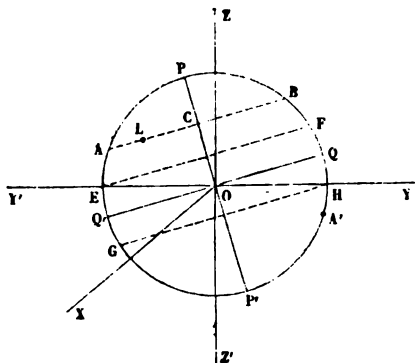
et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur (11),

$$\frac{dM}{dt} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{n'^2}{r^2} \cos 2\theta \right) = \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Le coefficient $\frac{3}{8} \frac{n'^2}{r^2}$ est toujours plus petit que l'unité; donc, si l'on suppose $\theta < 90^\circ$, ce qui suffit pour notre objet, la dérivée $\frac{dM}{dt}$ est positive, et il en est de même par conséquent de $\frac{d\theta}{dt}$. Ainsi l'inclinaison des anneaux sur l'écliptique croît avec le temps; et, si l'on admet que ces anneaux finissent par se précipiter à la surface de la planète, on conçoit qu'il résulte de ce phénomène un accroissement de l'inclinaison de l'équateur terrestre sur le même plan. On doit observer d'ailleurs que des causes analogues ont dû faire varier l'inclinaison de l'équateur solaire sur le plan du maximum des aires.

Revenons maintenant à l'époque où l'atmosphère terrestre, ayant déjà commencé à se condenser, s'étendait au delà de l'orbite actuelle de la Lune, mais très-peu au delà. Il est permis, par ce qui précède, de supposer que l'inclinaison θ de l'équateur de cette masse fluide sur le plan de l'écliptique était alors très-petite, et l'on doit admettre, conformément aux idées de Laplace, que la vitesse de rotation était à très-peu près égale au moyen mouvement actuel de la Lune autour de la Terre. Nous représenterons par OZ l'axe de l'écliptique dirigé vers le pôle boréal, par OP l'axe de rotation, par QQ' l'équateur, et par OX la ligne des équinoxes dirigée vers le nœud ascendant de l'équateur sur

l'écliptique, c'est-à-dire vers l'équinoxe d'automne. Dans la masse fluide, mais près de la surface et près de l'équateur, flottait un noyau solide L, de figure quelconque, qui plus tard est devenu la Lune. Ce noyau décrivait, en un jour sidéral, un cercle AB parallèle à l'équateur;



il était nécessairement doué d'un mouvement de rotation, autour d'un axe parallèle à OP, égal à son mouvement de révolution, sans quoi sa surface eût éprouvé, de la part du milieu ambiant, des frottements qui eussent bientôt amené cette égalité et ce parallélisme. D'ailleurs toutes ses oscillations périodiques, sauf celles qui appartenaient à la masse fluide tout entière, devaient nécessairement être éteintes par la résistance du milieu. Ainsi le noyau L a dû prendre spontanément une position telle que l'axe du plus grand moment d'inertie fût parallèle à OP, et que l'axe du plus petit moment d'inertie fût dirigé vers le point C, centre du cercle AB.

Bientôt l'atmosphère terrestre, continuant à se condenser, atteint l'orbite actuelle de la Lune; la force centrifuge à l'équateur devient égale à la pesanteur, et la Terre abandonne une zone de vapeurs dans laquelle le noyau L est compris. Cette zone, devenue libre, se contracte en se refroidissant; sa vitesse de rotation, son inclinaison et son mouvement de précession acquièrent des valeurs croissantes avec le temps; mais à l'origine son inclinaison est égale à θ , sa vitesse de rotation est égale à n , et le mouvement de son plan équatorial est déterminé par les formules (13), pourvu qu'on y remplace γ par θ . Tant que le noyau L reste compris dans cette zone, sa vitesse de rotation et sa vitesse de

révolution restent égales à la vitesse de rotation de la zone, et le plan de son équateur reste parallèle au plan équatorial de la zone; de sorte que, si l'on imagine par le point L un plan parallèle à l'écliptique, et si l'on désigne par $\frac{d\psi}{dt}$ le mouvement de précession de l'équateur lunaire sur ce plan, on a constamment

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Mais le noyau solide L ne fait pas partie de la zone de vapeurs qui l'enveloppe, et, lorsque cette zone se contracte, il s'en détache en devenant un satellite indépendant. Il conserve encore sa vitesse de rotation et sa vitesse de révolution, qui étaient égales et qui restent égales, mais il commence à décrire autour du foyer O une orbite, dont le plan est déterminé par ce point O et par la tangente à sa trajectoire au moment où la rupture a eu lieu. Remarquons sur-le-champ qu'il faut écarter le cas où le noyau L, au moment de la rupture, aurait été compris entre les deux tropiques EF, GH, car l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique aurait été alors tout au plus égale à 2θ , tandis que nous savons, par les observations, que cette inclinaison est plus grande que 2θ . Appelons λ la latitude géocentrique du noyau L, au moment où il se sépare de son anneau, et supposons en valeur absolue $\lambda > \theta$, en laissant arbitraire le signe de cette latitude. Si la Terre ne tournait pas en présence du Soleil, nous ne pourrions assigner aucune raison pour que la séparation se fût produite en un point plutôt qu'en un autre de la trajectoire; ce phénomène eût été déterminé par des causes secondaires, telles que le défaut d'homogénéité de la matière et la distribution inégale de la chaleur dans ses différentes parties. Mais la différence des actions du Soleil sur le point O et sur le point L constitue une cause prépondérante, qui a dû déterminer le phénomène dont il s'agit; et tandis qu'il existe entre les molécules de l'anneau fluide une cohésion qui les empêche d'obéir individuellement aux actions de la pesanteur, l'adhésion réciproque du fluide et du noyau L est nulle ou insensible (*).

(*) C'est ce qui résulte de ce fait que la Lune n'a point d'atmosphère. Si l'on voulait admettre que cet astre est doué d'une atmosphère très-rare, il faudrait prendre la surface limite de cette atmosphère pour surface limite du noyau L.

Il est donc vraisemblable que la rupture a eu lieu lorsque le Soleil se trouvait le plus près possible du zénith ou du nadir du point L, c'est-à-dire au moment de l'une des syzygies et dans le voisinage de l'un des solstices : le noyau L étant, par exemple, en A si sa latitude λ est boréale, ou dans la position symétrique A' si cette latitude est australe, et le Soleil se trouvant indifféremment vers Y ou vers Y'.

On voit immédiatement que, dans cette hypothèse, l'inclinaison γ de l'orbite sur l'écliptique est égale à $\lambda - \theta$, et que le nœud descendant de l'orbite a dû coïncider à l'origine avec le nœud ascendant de l'équateur; nous allons montrer que les choses étaient disposées de telle sorte que cette coïncidence a dû se maintenir indéfiniment. En effet, lorsque le noyau L, encore enveloppé dans la zone fluide, arrive en A ou en A', on peut le considérer comme décrivant un élément d'une orbite inclinée sur l'écliptique d'un angle γ , et l'on peut lui appliquer les formules qui déterminent le mouvement de l'équateur lunaire. Or, si l'on désigne par φ la longitude sélénocentrique de la Terre, comptée à partir d'une droite parallèle à OX, ces formules sont (*)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2}n \frac{C-A}{B} (\theta + \gamma) \sin 2\varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2}n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right) (1 - \cos 2\varphi);$$

et, puisqu'on suppose le noyau L en A ou en A', il faut faire $\sin 2\varphi = 0$, $\cos 2\varphi = -1$, ce qui donne

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = -3n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right).$$

D'un autre côté, le mouvement de précession de l'anneau, dont le noyau L fait encore partie, est déterminé par les formules (13), pourvu qu'on y remplace γ par θ . Puisqu'on suppose le Soleil en Y ou en Y', il faut faire $\sin 2\varphi' = 0$, $\cos 2\varphi' = -1$, et l'on tire de ces formules

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n'^2}{n}.$$

(*) Voir le Mémoire déjà cité. Nous prenons, bien entendu, les formules qui déterminent le mouvement de l'équateur vrai ou instantané, et non celles qui déterminent le mouvement de l'équateur géométrique.

Le mouvement rétrograde des nœuds de l'anneau est donc double de sa valeur moyenne; de sorte que, si nous représentons ici par $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ le moyen mouvement des nœuds de l'orbe lunaire, nous aurons, au moment que nous considérons,

$$\frac{d\omega}{dt} = 2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Mais, par ce qui précède, on doit avoir constamment

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Donc, si le noyau L se sépare de l'anneau précisément en A ou en A', on aura, dans l'état initial,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{3}{2} n \frac{C-A}{B} \left(1 + \frac{\gamma}{\theta}\right),$$

équation identique à celle que nous avons numérotée (4), et qui exprime la condition nécessaire pour que la coïncidence des nœuds, une fois établie, se maintienne indéfiniment.

RECHERCHES
SUR
LA RESPIRATION ET L'ASPHYXIE
DE
LA GRAINE DE VERS A SOIE,

PAR M. E. DUCLAUX,

PROFESSEUR SUPPLÉANT DE CHIMIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE CLERMONT-FERRAND.

Je me suis proposé, dans ce travail, d'étudier quelques-unes des questions physiologiques qui se rattachent à l'industrie de la soie. Malgré son importance, cette industrie est restée jusqu'à ce jour à peu près exclusivement fondée sur l'empirisme et la routine, et l'absence de documents théoriques pouvant servir de base à des prévisions et à des raisonnements s'est surtout fait sentir au moment où l'épidémie, qui depuis vingt ans désole nos contrées séricicoles, a pris des proportions telles qu'il a fallu songer à la combattre sérieusement. La science s'est alors trouvée à peu près désarmée, et la pressante nécessité d'un remède l'ayant forcée depuis lors à s'occuper davantage de la pratique que de la théorie, il en est résulté que si elle possède aujourd'hui contre la maladie actuelle l'excellent moyen prophylactique sorti des remarquables travaux de M. Pasteur, elle se verrait obligée, contre une maladie nouvelle, à recommencer de nouvelles études, accompagnées des mêmes difficultés. Et ce n'est pas seulement pour l'industrie de la soie qu'il en est ainsi. La situation est à peu près la même pour toutes celles dont la matière première est un de ces êtres vivants,

animaux ou végétaux, que la progression toujours croissante de nos besoins nous force à produire en quantités de plus en plus considérables. De là l'utilité de multiplier dans les temps calmes les travaux théoriques, qui doivent devenir, pour ainsi dire, les travaux de la paix, et qui ne demandent heureusement pas pour être exécutés l'habileté consommée et le génie d'invention qui doivent y présider dans les temps de crise.

La science séricicole s'est pourtant enrichie dans ces dernières années d'un grand nombre de travaux, parmi lesquels je citerai surtout les remarquables études de statique chimique publiées par M. Peligot. Mais je ne connais pas de recherches suivies faites sur la graine de vers à soie, dont l'importance commerciale est devenue, depuis quelque temps, extrêmement grande, et dont la bonne ou mauvaise manipulation a sur le succès de l'éducation l'influence la plus incontestable. J'ai donc cru qu'il n'était pas inutile d'étudier la respiration de cette graine. Je l'ai fait en me plaçant le plus possible au point de vue théorique, mais en négligeant pourtant et remettant à plus tard les questions incidentes qui me paraissent avoir moins d'intérêt au point de vue pratique.

I. — *Respiration de la graine de vers à soie.*

La graine sur laquelle j'ai opéré avait été faite par moi-même l'année dernière, dans le Puy-de-Dôme, et provenait de vers qui jusqu'à la fin s'étaient montrés très-vigoureux et très-sains, et avaient donné des papillons dont aucun n'était corpusculeux. Des essais préliminaires ayant montré que la respiration de ces œufs, qui consiste comme à l'ordinaire en une absorption d'oxygène et une exhalation d'acide carbonique, était très-lente, je me suis contenté pour l'étudier de renfermer la graine dans des flacons bouchés dont j'analysais l'air au bout de quelque temps. C'était m'éloigner un peu des conditions physiologiques, mais c'était rendre aussi l'étude plus facile et plus rapide. Nous verrons du reste plus tard que l'asphyxie n'a pas sur les graines l'influence qu'elle aurait sur des êtres plus élevés en organisation.

Je me suis assuré, d'ailleurs, que pourvu qu'on ait la précaution de

ne pas laisser trop longtemps les graines séjourner dans un même volume d'air, leur respiration ne diffère pas beaucoup de la respiration normale. En abandonnant, en effet, pendant le même temps un même poids de graine dans des flacons de capacité différente, on constate que la quantité d'oxygène transformé est d'autant plus grande que le flacon est plus grand, ce qui prouve que dans les petits la graine sent dès les premiers moments l'effet de l'asphyxie, mais la différence n'est pas grande, ainsi que le montrent les tableaux suivants :

Graine âgée de 3 jours, 1 jour de respiration.

Volume du flacon.	Oxygène transformé.	Acide carbonique produit.
^{cc} 16,0	^{cc} 1,4	^{pour 100.} 8,57
80,0	2,2	2,85
133,0	2,6	1,83

Graine âgée de 2 jours, 1 jour de respiration.

Volume du flacon.	Oxygène transformé.	Acide carbonique produit.
^{cc} 16,0	^{cc} 2,7	^{pour 100} 16,33
133,0	3,9	2,58

Le premier tableau montre que tant qu'on ne dépasse pas 3 ou 4 pour 100 d'acide carbonique, la respiration reste à peu près normale, mais qu'à 8 pour 100 d'acide carbonique, elle perd un peu de son activité. Toutefois, ce ralentissement n'est pas aussi complet qu'on pourrait le croire, puisque dans le second tableau, où la graine du premier flacon a vécu dans un air renfermant à la fin 16 pour 100 d'acide carbonique, l'activité de sa respiration, mesurée par la quantité d'oxygène transformé, n'est pas devenue deux fois plus faible que dans l'autre flacon, où, la quantité d'acide carbonique n'ayant pas dépassé 3 pour 100, la respiration était restée à peu près normale.

Les graines ont donc, en même temps, une assez grande sensibilité vis-à-vis de l'asphyxie, et une assez grande force de résistance contre ses effets. Nous verrons cette conclusion se corroborer dans la suite de ce travail. Pour le moment, on voit que l'on peut se contenter, pour

étudier la respiration de la graine, de la renfermer dans des flacons dont on étudie l'air au bout d'un temps plus ou moins long. C'est ce que j'ai fait en me servant de flacons de 16 centimètres cubes environ, où j'introduisais 1 gramme de graine.

Ce procédé opératoire m'obligeait, il est vrai, à négliger entièrement la question de l'absorption ou du dégagement d'azote pendant la respiration. Mais d'autres expériences, dont je citerai plus bas quelques-unes, m'ayant montré que ce dégagement d'azote, s'il existait, était très-faible, je l'ai supposé nul, et j'ai toujours admis implicitement que le volume primitif de ce gaz n'avait pas varié.

J'ai négligé aussi comme ne pouvant empêcher mes résultats d'être comparables entre eux sous le rapport de la quantité de graine mise en action, les pertes de poids que cette graine éprouve en vieillissant. Voici celles qu'a subies la mienne, pesée le lendemain de la ponte :

Age de la graine.	Perte pour 100.
2 jours	0,16
3 »	0,40
5 »	0,74
9 »	1,14
18 »	1,57
31 »	2,36
2 mois	3,10
5 $\frac{1}{2}$ »	4,40
7 »	4,50
9 $\frac{1}{2}$ » (mise à l'éclosion).....	6,10
3 jours après	8,00
Veille de l'éclosion	14,60

La perte reste, comme on le voit, à peu près stationnaire pendant longtemps, et ne dévient guère sensible qu'au voisinage de l'éclosion, au moment où le ver se forme dans l'œuf, dont il n'occupe plus à la fin que la périphérie. Mais jusqu'alors la variation de poids est de peu d'importance et à peu près constante, je l'ai négligée, et ai toujours introduit dans mes flacons le même poids, savoir : 1 gramme de graine.

Une influence beaucoup plus importante à bien connaître était celle de la température sur l'activité de la respiration. J'ai cherché à la me-

surer à diverses époques, je l'ai toujours trouvée très-marquée. Je donnerai seulement deux expériences qui le démontrent :

Graine âgée de 22 jours, 4 jours de respiration.

	Température = 30°	Température = 15°
Acide carbonique	9,05	3,86
Oxygène	11,11	14,58
	<hr/> 20,16	<hr/> 18,44

Graine âgée de 7 mois, 1 mois de respiration.

	Température = 16°	Température = 3°, 5
Acide carbonique	19,15	10,52
Oxygène	0,60	4,51
	<hr/> 19,75	<hr/> 15,03

L'action puissante de la température, mise en évidence par ces résultats, devait évidemment venir compliquer l'étude que je voulais faire des variations normales de l'activité respiratoire de la graine à diverses époques entre sa ponte et son éclosion. J'aurais pu séparer les deux effets, celui de l'âge et celui de la température, en maintenant cette dernière constante. J'ai préféré les laisser réunis, et étudier la graine conservée dans les conditions normales. Elle datait des premiers jours d'août. Je l'ai laissée pendant tout ce mois dans le local où elle avait été faite, à une température qui a été malheureusement toujours trop élevée, attendu qu'elle a varié entre 20 et 24 degrés. Puis la graine a été transportée dans un caveau sec et bien aéré, où la température s'est abaissée en hiver jusqu'à 4 degrés. Au printemps, elle a été conservée dans une cave fraîche jusqu'au moment d'être mise à l'éclosion. A diverses époques, j'introduisais 1 gramme de cette graine dans un flacon de 16 centimètres cubes, que j'abandonnais à lui-même et dont j'analysais l'air après un temps variable.

Voici le tableau qui rassemble les résultats obtenus :

AGE de la graine.	TEMPS de la respiration.	TEMPÉRATURE.	ACIDE CARBONIQUE produit.	OXYGÈNE restant.	SOMME.
1 jour.	jours 1	21°	5,17	12,71	17,88
2 »	1	21	12,46	8,08	20,54
3 »	1	20,5	9,65	11,03	20,68
4 »	1	20	4,50	15,91	20,41
6 »	1	21	2,14	17,14	19,28
7 »	2	21	4,22	15,84	20,06
13 »	2	21	4,25	15,60	19,85
23 »	2	20	2,56	16,49	19,05
1 mois.	2	21	1,78	17,14	18,92
2 »	6	20	5,07	13,04	18,11
3 »	6	16	4,17	13,20	17,37
5 »	10	11	1,46	15,22	16,68
7 »	20	7	7,41	8,15	15,56
9 »	7	8	6,59	10,76	17,35
Veille de l'éclosion	1	28	17,70	0	17,70

Enfin, pour relier autant que possible la respiration de la graine à celle des vers qui en proviennent, j'ai introduit le lendemain de l'éclosion 240 milligrammes = 470 vers, dans un flacon de 26 centimètres cubes. Au bout de vingt-quatre heures ils étaient tous morts, l'air renfermant 18,82 pour 100 d'acide carbonique et pas d'oxygène.

Envisagés d'une manière générale, les nombres que renferme ce tableau montrent que la respiration ne se fait pas avec la même intensité à toutes les époques. Très-active au moment de la ponte, elle s'affaiblit peu à peu jusqu'en décembre ou janvier, où elle présente un minimum. Puis a lieu une espèce de réveil de la graine engourdie, et la respiration va en s'accéléralant jusqu'à l'éclosion. Remarquons pourtant qu'on ne saurait considérer la puissance de cette fonction comme proportionnelle, soit à la quantité d'oxygène consommé, soit à la quantité d'acide carbonique produit, et cela à cause du phénomène d'asphyxie qui commence presque dès les premiers moments, et suspend d'autant plus la respiration que l'air ambiant est déjà plus vicié. Nous verrons bientôt

comment il est possible de faire sortir de ce tableau, malgré cette circonstance, la marche réelle de l'activité respiratoire pendant toute la vie de la graine.

Mais nous pouvons déjà en tirer plusieurs renseignements utiles. Il montre d'abord que l'activité respiratoire de la graine, quoique subissant l'influence de la température, n'est pourtant pas uniquement commandée par elle. Ainsi sept mois après la ponte, c'est-à-dire au mois de mars, et malgré l'action d'une température de 7 degrés, la respiration a été plus active qu'en janvier, où pourtant la température était de 11 degrés. D'un autre côté, dans les deux premiers mois, et malgré l'action à peu près constante d'une température de 20 degrés, la respiration a été en diminuant graduellement d'intensité.

L'hibernation de la graine paraît donc être un phénomène normal, indépendant jusqu'à un certain point de l'abaissement de température. C'est, du reste, un fait important et que nous retrouverons tout à l'heure.

La respiration des trois jours qui suivent la ponte mérite encore de fixer l'attention. Elle est, comme on voit, très-active, et, en outre, le troisième jour, elle passe par un maximum. Or, corrélativement à sa marche, se développe le phénomène bien connu du changement de couleur de la graine, dont la teinte d'abord jaune clair passe au jaune rougeâtre, puis à la couleur café au lait, puis à la couleur lie de vin, qu'elle conserve jusqu'à l'éclosion. Ce changement a été surtout sensible sur ma graine du second au troisième jour, c'est-à-dire au moment où la respiration a été le plus active.

De plus, à partir du moment où le changement de couleur de la graine devient sensible à l'œil, et pendant qu'il dure, le volume de l'acide carbonique produit égale à peu près le volume d'oxygène disparu, tandis qu'à toutes les autres époques il en diffère de 2 à 5 pour 100. On pourrait considérer cet effet momentané comme dû à la superposition de deux phénomènes, la respiration de la graine se faisant comme à l'ordinaire, avec disparition apparente d'une portion de l'oxygène, et le changement de couleur de l'enveloppe, qui serait une véritable combustion de carbone seul, et dont l'action prédominante ferait disparaître la diminution d'oxygène due à la respiration. Cette conclusion serait naturelle si l'on trouvait pendant toute la vie de la graine un rapport à peu près constant entre le volume de l'acide car-

bonique produit et le volume de l'oxygène absorbé. C'est à quoi il serait naturel de s'attendre, la graine étant toujours en apparence semblable à elle-même, à l'abri des effets d'une alimentation variée, de l'état de digestion ou d'abstinence. Mais on voit qu'il n'en est pas ainsi, et que le rapport de ces deux volumes de gaz est variable aux diverses époques. Il n'est même pas constant à un moment donné, et les expériences sur l'action de la température rapportées plus haut montrent qu'il est toujours plus voisin de l'unité avec la chaleur qu'avec le froid. Nous verrons en outre tout à l'heure qu'il varie pour une même graine avec le degré de l'asphyxie auquel elle est soumise. Il est donc inutile de considérer dans la vie de la graine deux périodes différentes entre elles par la valeur de ce rapport, d'autant mieux que le tableau ci-dessus montre qu'elles passent insensiblement l'une à l'autre. On voit, en outre, si les autres animaux ressemblent pour la respiration à la graine de vers à soie, ce qui n'est pas improbable, combien il est vain de chercher à établir chez eux un rapport constant entre le volume de l'oxygène absorbé et le volume d'acide carbonique produit.

En résumé, la respiration de la graine présente deux périodes d'activité, séparées entre elles par une période d'hibernation normale et physiologique. Il était naturel de penser que la force de résistance aux agents extérieurs devait être très-différente aux différents âges, c'est ce que je me suis proposé de rechercher en commençant par l'étude de l'influence de l'asphyxie, et en passant ensuite à celle de la température.

II. — *Influence de l'asphyxie.*

Pour suivre autant que possible la progression des effets de l'asphyxie, j'enfermais un gramme de graine dans plusieurs flacons de capacité à peu près égale que je reprenais ensuite, un à un, à des intervalles différents, pour en analyser l'air : chaque lot de graine était ensuite soigneusement débarrassé du mercure avec lequel il avait été forcément en contact, et conservé pour être élevé à côté de graine normale qui n'avait subi aucun traitement.

J'ai commencé par étudier la graine au moment de la ponte, en l'en-

fermant vingt-quatre heures après dans des flacons de 16 centimètres cubes, dont le premier a été ouvert le lendemain, et les autres de jour en jour. Voici les résultats obtenus :

AOUT. — Lendemain de la ponte.

TEMPS de la respiration.	TEMPÉRATURE.	ACIDE CARBONIQUE produit.	OXYGÈNE restant.	SOMME.
jours	°			
1	21	5,17	12,71	17,88
2	21	18,96	»	18,96
3	20	21,08	»	21,08
4	20	21,20	»	21,20
7	20	22,00	»	22,00

On voit qu'au bout de deux jours tout l'oxygène a déjà disparu, et la graine en absorbe les dernières portions avec une telle puissance, qu'on peut se servir d'œufs de vers à soie au lieu d'acide pyrogallique pour faire une analyse d'air. Il suffit, après mesure du volume d'air dans un tube gradué, d'y faire passer à travers le mercure une petite ampoule ouverte à l'une de ses extrémités légèrement effilée et remplie de graine bien tassée. L'oxygène de l'air se transforme peu à peu en acide carbonique. On l'absorbe si l'on veut au fur et à mesure avec quelques gouttes d'une dissolution de potasse, qui, grâce à l'ampoule, ne touche pas les graines. L'absorption terminée, on fait la lecture sur l'eau, à travers laquelle l'ampoule tombe entraînant avec elle les graines et la faible quantité d'azote qu'elle avait emportée dans l'air à analyser. Il y a une erreur qui tient à l'oxygène primitivement contenu aussi dans l'ampoule, mais elle est très-faible, et on trouve par ce procédé, en somme grossier comme manipulation, des nombres qui varient entre 20,3 et 20,7 d'oxygène. Mais ces expériences démontrent aussi que s'il se dégage de l'azote, c'est en proportions très-faibles, et c'est pour cela que j'ai tenu à en parler.

Le tableau ci-dessus montre, en outre, que si tout l'oxygène est déjà absorbé au bout de deux jours, la vie de la graine n'est pas pour cela

interrompue, et qu'elle continue à dégager de l'acide carbonique jusqu'à égalier et même dépasser le volume primitif de l'oxygène. Je reviendrai tout à l'heure sur ce fait. J'en conclus seulement maintenant que la graine a résisté à l'asphyxie au moins jusqu'au quatrième jour. Un autre phénomène sensible à l'œil conduit à la même conclusion. Les graines, qui, au moment où on les a mises dans le flacon, étaient encore jaunes, ont bientôt commencé à changer; mais, une fois tout l'oxygène absorbé, leur couleur est restée stationnaire jusqu'au moment où le flacon a été ouvert. Celles des trois premiers flacons ont alors continué à subir leurs transformations normales. Pour le quatrième, quelques-unes, au lieu de changer de teinte et de rester turgescentes, se sont aplaties et sont mortes. Pour le cinquième, toutes les graines ont péri. On doit en conclure qu'à ce moment de leur existence elles ne résistent pas à l'asphyxie plus de deux ou trois jours.

Elles résistent encore moins la veille de l'éclosion, et douze heures de séjour dans un air privé d'oxygène suffisent alors pour tuer le ver déjà formé dans l'œuf. L'organisme de ce ver a pourtant encore assez de puissance, comme nous l'avons vu, pour aller chercher dans l'air les dernières traces de gaz respirable.

Restait à savoir la force de résistance entre ces deux époques. J'ai pour cela soumis la graine à l'asphyxie à trois moments différents. D'abord en août, vingt jours après la ponte, c'est-à-dire au moment où l'activité respiratoire va en décroissant de jour en jour; puis en hiver, au 10 janvier, où cette activité est voisine du minimum; enfin au 27 avril, époque où elle recommence à augmenter. Voici les résultats trouvés : Pour le mois d'août, les expériences I à IV ont été faites dans des flacons de 13 centimètres cubes, les autres dans des flacons de 17 centimètres cubes : les expériences IV et V, faites le même jour, servant de transition. Pour janvier et avril, tous les flacons étaient de 16 centimètres cubes.

AOUT. — *Age de la graine, 20 jours.*

EXPÉ- RIENCES.	TEMPS de la respiration.	TEMPÉRATURE.	ACIDE CARBONIQUE produit.	OXYGÈNE restant.	SOMME.
I	jours 2	22°	4,30	14,40	18,70
II	4	23	7,00	9,40	16,40
III	6	23	11,40	4,10	15,50
IV	8	23	14,30	1,30	15,60
V	8	23	11,00	4,80	15,80
VI	10	22,5	13,20	1,70	14,90
VII	14	22	16,30	"	16,30
VIII	20	23	18,72	"	18,72

10 JANVIER. — *Age de la graine, 5 mois et demi.*

EXPÉ- RIENCES.	TEMPS de la respiration.	TEMPÉRATURE.	ACIDE CARBONIQUE produit.	OXYGÈNE restant.	SOMME.
I	jours 5	10°	0,00	18,30	18,30
II	10	11	1,46	15,22	16,68
III	15	9	3,00	14,23	17,23
IV	30	9	7,91	6,47	14,38
V	45	8,5	12,68	0,74	13,42
VI	50	10	13,79	"	13,79
VII	55	12	15,07	"	15,07
VIII	65	11	15,30	"	15,30

27 AVRIL. — *Age de la graine, 9 mois.*

EXPÉ- RIENCES.	TEMPS de la respiration.	TEMPÉRATURE.	ACIDE CARBONIQUE produit.	OXYGÈNE restant.	SOMME.
I	jours 7	8°	6,59	10,76	17,33
II	18	10	17,37	"	17,37

Le phénomène est encore le même qu'après la ponte. L'oxygène disparaît peu à peu, sans être remplacé par un égal volume d'acide carbonique, et la disproportion est même d'autant plus grande que l'asphyxie dure plus longtemps. Puis, une fois l'oxygène disparu, la vie ne cesse pas pour cela, et la graine dégage encore pendant longtemps de l'acide carbonique. Ce phénomène se présente même avec un tel caractère de constance et de régularité, qu'il mérite de fixer l'attention.

Il est évident que, au moins pour la graine de vers à soie, on n'a pas le droit de conclure que la portion de l'oxygène disparu que l'on ne retrouve pas dans l'acide carbonique formé est entrée dans des combinaisons non gazeuses. On voit qu'une partie au moins, sinon tout, s'unit d'une manière instable avec les tissus de la graine, et sert à sa respiration lorsque déjà tout celui qui existait à l'état libre a disparu. Maintenant, faut-il admettre pour la graine deux modes de respiration, suivant qu'il y a de l'oxygène libre ou qu'il n'y en a pas. N'est-il pas plus naturel de penser que, dans un cas comme dans l'autre, la graine respire non par l'oxygène libre, mais par celui qui est fixé sur ses tissus, qui s'y renouvelle constamment, et qu'elle ménage d'autant plus qu'elle en trouve moins autour d'elle pour le remplacer? Si elle n'en trouve plus, elle vit aux dépens de ce qui lui reste, et la mort survient si on ne lui permet pas de renouveler son approvisionnement (1).

Cette manière de concevoir le phénomène est d'accord avec ce que nous allons voir tout à l'heure de la dégradation insensible des effets produits sur ces divers lots de graine par l'asphyxie, et de l'absence complète de saut brusque correspondant au moment où tout l'oxygène a disparu. La respiration de la graine ne serait plus alors un phénomène purement chimique, une simple combustion de tissus, mais une fonction complexe, une résultante de trois phénomènes principaux (d'un côté, la fixation de l'oxygène sur les tissus; de l'autre, la formation, puis l'exhalation de l'acide carbonique), qui seraient, en vertu de leur nature

(1) En d'autres termes, tout se passe comme s'il y avait dans la graine une matière analogue au sang des animaux supérieurs. Ce qui confirme cette manière de voir, c'est qu'en broyant de la graine, on en tire un liquide visqueux qui absorbe rapidement l'oxygène. Dans une expérience, 4 centimètres cubes de ce liquide, laissés trois heures dans un flacon de 20 centimètres cubes, y avaient absorbé 0^{cc}, 4 d'oxygène et exhalé 0^{cc}, 2 d'acide carbonique.

différente, diversement influencés par les circonstances au milieu desquelles ils se produisent, et dont les plus importantes seraient l'état chimique des tissus, la composition de l'air ambiant, la température. De telle sorte, on pourrait avoir comme dans l'expérience I de janvier, rapportée ci-dessus, absorption d'oxygène sans exhalation d'une quantité *sensible* d'acide carbonique, soit production d'acide carbonique sans absorption d'oxygène, comme cela arrive toujours à la fin de l'asphyxie.

Instinctivement, on rapproche ce dernier fait du fait à peu près identique observé par W. Edwards sur divers animaux qui, plongés dans l'azote ou l'hydrogène pur, n'en donnent pas moins de l'acide carbonique. Si l'assimilation de la graine aux autres êtres était admise, les deux faits auraient la même explication. Cette assimilation ne paraît pas hasardée quand on songe que beaucoup de phénomènes observés sur les autres animaux existent aussi pour la graine. Ainsi on retrouve dans les tableaux précédents ce que MM. Allen et Pepys (*Philosophical Transactions*, 1803) ont observé pour l'homme, à savoir : que, dans les circonstances défavorables à la respiration, l'absorption d'oxygène est plus sensible. Dans son beau travail sur la respiration, M. Regnault a montré que chez les marmottes le rapport entre l'oxygène contenu dans l'acide carbonique et l'oxygène consommé dans la respiration diminuait pendant l'état d'hibernation. La graine est dans le même cas que le montre le tableau de la page 90.

Enfin, comme nouvelle ressemblance qui nous ramène directement à l'objet de nos études, M. Regnault a constaté que les marmottes résistent beaucoup mieux à l'asphyxie à l'état d'engourdissement qu'à l'état d'activité normale. Les tableaux ci-dessus montrent qu'il en est de même pour la graine qui peut vivre pendant 10 jours en août, pendant 20 jours en décembre, dans un air dont elle a au préalable absorbé tout l'oxygène. Nous verrons en effet tout à l'heure que la graine n'est pas morte dans ces conditions, et sa force de résistance contre l'asphyxie ne laisse pas que d'avoir quelque chose de surprenant quand on songe combien, au début de cette étude, nous l'avons trouvée sensible à cette influence. Mais ces deux propriétés, loin de se contredire, s'expliquent l'une l'autre. C'est parce que la graine suspend sa respiration, la modèle pour ainsi dire sur le degré de viciation de l'air ambiant, qu'elle peut résister.

Cette respiration modérée conserve pourtant toujours assez de puissance pour aller chercher les dernières traces d'oxygène dans l'air, et, comme l'expérience suivante le montre, elle est toujours prête à reprendre son activité première dès que les circonstances extérieures deviennent favorables.

Le 20 août, je pèse deux lots de 1 gramme de graine pondue le 28 juillet. L'un de ces lots est laissé à l'air, l'autre asphyxié pendant 6 jours dans un flacon de 16 centimètres cubes. Au bout de ce temps, on introduit rapidement les deux lots dans deux flacons égaux de 16 centimètres cubes, dont on analyse l'air au bout de 4 jours. Celui où avaient respiré les graines asphyxiées au préalable pendant 6 jours avait la composition suivite :

Acide carbonique.....	6,47
Oxygène.....	12,95
	<hr/> 19,42

Pour l'autre, on a trouvé :

Acide carbonique.....	6,03
Oxygène.....	13,12
	<hr/> 19,15

Une asphyxie de 6 jours n'avait donc nullement affaibli les graines, et leur activité respiratoire au sortir de cet état était au moins aussi grande, sinon plus, qu'à l'état normal.

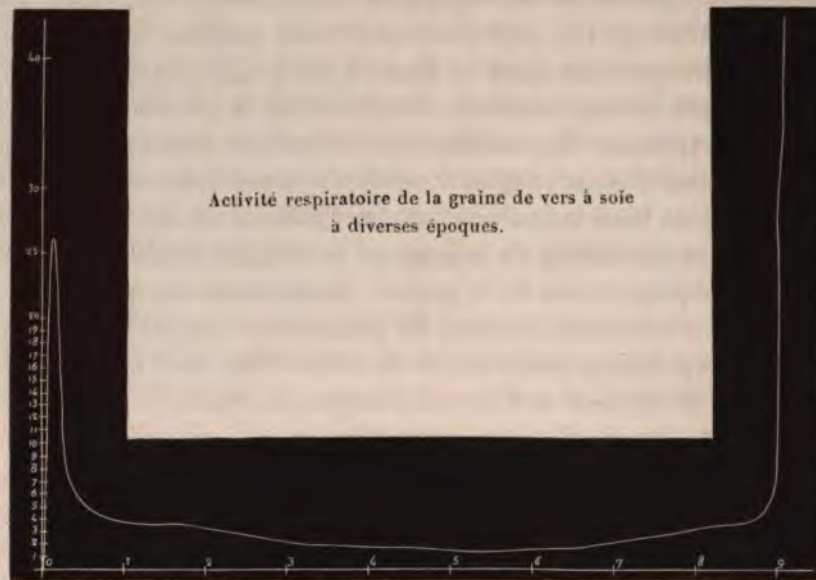
Je dis sinon plus, parce qu'il est évident qu'il y a des moments où on peut réaliser ce fait paradoxal, que de la graine au sortir de l'asphyxie respire plus activement que si elle n'avait pas été asphyxiée. Il suffit de se rapporter aux résultats précédents pour s'en convaincre. Si, par exemple, on suspend un ou deux jours, au moyen de l'asphyxie, le changement de couleur des graines au second jour de leur existence, et qu'on compare leur respiration pendant qu'elles traversent ensuite cette période d'activité respiratoire énergique, à celle des graines qui l'ont déjà traversée, on trouve, et l'expérience vérifie, que l'avantage est du côté des graines asphyxiées. Le même fait peut se reproduire pendant tout le temps où l'activité respiratoire est en décroissance.

Ainsi, dans une expérience identique à celle que nous venons de rapporter, de la graine âgée de 12 jours, asphyxiée d'abord 8 jours, puis mise aussitôt et laissée pendant 6 jours dans un flacon de 16 centimètres cubes, y avait produit 12,9 pour 100 d'acide carbonique, pendant que la même graine, asphyxiée seulement pendant les 6 derniers jours, n'en avait produit, dans un flacon égal, que 7,93 pour 100.

A n'envisager que ces résultats, l'asphyxie de la graine serait d'une innocuité complète, à la condition de n'être pas poussée trop loin. Elle a, pour ainsi dire, ses règles normales, son mécanisme spécial, que nous connaissons bien maintenant, et la régularité de son action nous permet de tirer du tableau de la page 90 la marche réelle de l'activité respiratoire pendant la vie de la graine. Nous avons vu qu'il ne peut pas la donner directement, à cause du phénomène d'asphyxie qui commence dès les premiers moments, et dont les effets sont d'autant plus marqués que la viciation de l'air est plus grande. Mais nous avons dans l'étude faite de l'asphyxie, soit au mois de janvier, soit au mois d'août, une mesure de ces effets. Il est évident en effet que, si nous comparons en avril et en janvier, par exemple, les temps nécessaires, non pas à la production d'une certaine quantité d'acide carbonique (nous savons pourquoi), mais à l'absorption d'une certaine quantité d'oxygène, les activités respiratoires à ces deux époques seront en raison inverse de ces temps. En prenant celle du mois de janvier pour unité, on dresse le tableau suivant, qui résume assez fidèlement la respiration de mes graines pour les conditions de température où elles ont été placées :

AGE de la graine.	ACTIVITÉ respiratoire.	AGE de la graine.	ACTIVITÉ respiratoire.
1 jour.	13,8	22 jours.	3,8
2 »	26,0	1 mois.	3,2
3 »	19,0	2 »	2,3
4 »	8,9	5 $\frac{1}{2}$ »	1,0
6 »	7,0	7 »	1,4
7 »	4,5	9 »	2,9
13 »	4,7	Veille de l'éclosion.	48,0
		Lendemain de l'éclosion	300 ?

Ces résultats se traduisent graphiquement par la courbe ci-dessous, remarquable par la brusquerie avec laquelle elle se relève à ses deux extrémités.



III. — Éducation des graines asphyxiées.

Revenons maintenant aux conclusions pratiques que nous avons tirées tout à l'heure. La graine qui, au moment de la ponte et à la veille de l'éclosion, ne peut guère résister à plus de deux ou trois jours d'asphyxie, la supporte pendant 10 jours en août, pendant 20 jours en janvier. La différence doit même être plus sensible que je ne l'ai trouvé, car je n'ai certainement pas atteint en janvier et en août la limite de résistance atteinte au moment qui a suivi la ponte, et, au lieu de trouver comme alors quelques graines mortes et aplaties, je voyais que toutes celles de janvier et d'août étaient restées gonflées et sans aucun mal apparent. Mais n'avaient-elles pas été un peu atteintes, n'y avait-il pas de vice caché dans ces graines très-belles d'aspect? C'est ce que, seule, l'éducation des divers lots pouvait m'apprendre.

Il était évidemment inutile de les élever tous. Aussi en ai-je sacrifié

quelques-uns aussitôt après l'éclosion, et après avoir constaté la quantité de vers fournis par mille graines. Sur les autres, j'ai prélevé 300 vers que j'ai réduits à 100 après la deuxième mue, et que j'ai élevés, mais dans d'assez mauvaises conditions, car je n'ai eu à ma disposition pour les nourrir que des feuilles épaisses et velues provenant d'un mûrier noir; et j'ai remarqué, à diverses reprises, des vers qui, après l'ingestion de ces feuilles, devenaient tout pléthoriques, et recourbaient leur corps en arrière jusqu'à ce que la tête vint presque toucher l'éperon. Quelques-uns mouraient dans cette position en bavant un liquide noirâtre; les autres guérissaient, surtout si je les soumettais à la diète et si je leur donnais ensuite un repas de feuilles tendres de mûrier blanc (1).

Malgré cet inconvénient, le résultat de l'éducation a encore été bon, ainsi que le montre le tableau suivant, qui donne la quantité de vers aux diverses mues et de cocons fournis par 1000 graines asphyxiées en août, en janvier et en avril, et comparativement les nombres se rapportant à la graine normale :

(1) La vigueur de santé du ver est en effet très-remarquable, et je dois ajouter qu'on lui donne trop souvent l'occasion de l'utiliser. A côté de cela, il y a chez lui une sensibilité extrême vis-à-vis de certaines influences. M. Faivre a montré qu'il ne résistait pas à l'odeur de quelques essences. L'expérience suivante montre qu'il est tué avec rapidité par les plus faibles traces de vapeur de mercure. Le 24 mai, j'expose des vers âgés de 3 jours sur une feuille de carton reposant elle-même sur un bain de mercure, et je recouvre le tout d'une cloche à douille, ouverte par le haut et reposant sur trois petites cales de bois. Le lendemain beaucoup de vers sont éloignés de la feuille et immobiles. Je sers régulièrement les repas; trois jours après, tous les vers étaient morts. Une feuille d'or suspendue au-dessus du mercure, à 5 millimètres de la surface, n'avait nullement blanchi pendant le même temps.

ÉPOQUE de l'asphyxie.	EXPÉ- RIENCES.	TEMPS de l'asphyxie	VERS ÉCLOS sur 1000 graines.	NOMBRES DE VERS RESTANTS				COCONS pro- duits.
				après la 1 ^{re} MUE	après la 2 ^e MUE.	après la 3 ^e MUE.	après la 4 ^e MUE.	
Graine normale...			875	864	854	848	836	820
Août...		Jours						
		I 2	864	838	780	780	775	770
		II 4	864	»	»	»	»	»
		III 6	833	»	»	»	»	»
		IV 8	666	666	636	630	625	607
		V 10	777	»	»	»	»	»
		VI 14	666	641	610	595	595	590
Janvier.		VII 20	50	»	»	»	»	»
		I 5	888	866	839	831	831	800
		II 10	888	»	»	»	»	»
		III 15	861	843	783	758	755	750
		IV 30	888	852	817	810	800	790
		V 45	750	750	703	703	702	670
		VI 50	722	»	»	»	»	»
		VII 55	500	490	488	473	473	409
Avril...		VIII 65	111	103	101	101	100	92
		I 7	200	188	181	179	179	153
		II 18	125	»	»	»	»	»

Tous les vers étaient du reste très-beaux, les cocons bien formés, et les papillons irréprochables. Ils étaient, de plus, parfaitement exempts de corpuscules.

On voit que la quantité de vers éclos et de cocons est d'autant plus faible que l'asphyxie a été plus longue; mais la décroissance est lente, régulière, et ne commence à être très-sensible que lorsque l'asphyxie a duré très-longtemps. De plus, l'effet de l'asphyxie paraît être seulement de tuer un certain nombre de graines, et les vers éclos des divers lots ne paraissent garder aucun souvenir du traitement auquel ils ont été soumis à l'état d'œufs. Si, en effet, ainsi qu'on le fait d'ordinaire, on cherche ce que deviennent dans l'éducation 100 vers comptés à la première mue, on trouve les nombres suivants :

ÉPOQUE de l'asphyxie.	EXPÉ- RIENCES.	NOMBRES DES VERS RESTANTS SUR 100 VERS comptés à la 1 ^{re} mue.			COCONS produits.
		après la 2 ^e mue.	après la 3 ^e mue.	après la 4 ^e mue.	
Graine normale.....		98	97	96	93
Août.....	I	93	93	93	91
	IV	95	94	94	91
	VII	95	93	93	92
Janvier.....	I	97	96	96	93
	III	93	88	88	87
	IV	96	95	94	93
	V	94	94	93	90
	VII	100	96	96	84
	VIII	98	98	97	89
Avril.....	I	96	95	95	81

Les différences entre les divers lots sont très-faibles. L'effet de l'asphyxie paraît donc être à peu près uniquement de tuer les œufs, et cette expérience démontre que des graines peuvent être très-belles d'aspect, changer de couleur comme des graines normales au voisinage de l'éclosion, et n'éclore qu'à moitié, au quart ou même pas du tout. Ce sont là malheureusement les conditions dans lesquelles se trouvent tous les ans quelques-uns des lots de graine achetés par les éducateurs, surtout parmi celles qui, provenant d'un pays éloigné comme le Japon, ont été mal emballées, conservées dans un endroit chaud comme la cale d'un navire, et soumises au débarquement à un refroidissement rapide, destiné à empêcher leur éclosion.

Toutes ces conditions sont vicieuses ainsi que nous allons le voir.

D'abord, tout emballage défectueux, plus généralement tout moyen de conservation exposant la graine à l'asphyxie est mauvais en lui-même, ainsi que nous venons de nous en convaincre, même au mois de janvier, à plus forte raison aux approches de l'éclosion. Mais, entre ces deux époques, il est d'autant plus nuisible que la graine est plus vieille. Le tableau ci-dessus montre, en effet, qu'un même degré dans l'asphyxie

est d'autant plus funeste à la graine qu'elle le subit à une époque plus voisine de l'éclosion. Ainsi les graines d'août au bout de 4 jours, de janvier au bout de 30 jours, d'avril au bout de 7 jours avaient à peu près également vicié l'air qu'elles respiraient. Or, celle d'avril a donné beaucoup moins de vers et de cocons. Cette conséquence apparaîtra encore plus nette dans les expériences suivantes, qui ont porté sur trois échantillons de la même graine, asphyxiés à peu près de la même quantité, mais à trois époques différentes, à partir du mois de janvier :

ÉPOQUE de la mise en flacons.	TEMPS du séjour.	ACIDE CARBONIQUE produit.	VERS ÉCLOS sur 1000 graines.	COCONS produits.
10 janvier.	31 jours.	pour 100. 7,91	888	790
29 juin.	20 »	7,41	666	480
27 avril.	7 »	6,59	200	153

Il faut donc prendre d'autant plus de précautions pour la conservation des graines qu'elles sont plus voisines de leur éclosion, et un mois et demi avant ce moment, elles ne peuvent pas séjourner sans inconvénient dans un air qui, au mois de janvier, serait absolument sans influence sur le résultat de l'éducation.

De même, l'asphyxie, à quelque époque qu'elle se produise, est d'autant plus redoutable que la température est plus élevée. C'est ce que démontrent les résultats de l'éducation que j'ai faite des deux lots de graine de 7 mois, asphyxiés l'un à 16 degrés, et l'autre à 3°, 5, dont j'ai parlé page 89 :

Graine normale.....	1000	graines	ont donné	875	vers	et	800	cocons.
Graine asphyxiée à 3°, 5.	1000	»	»	222	»		185	»
Graine asphyxiée à 16°...	1000	»	»	0	»		0	»

Les effets ont été très-sensibles, parce que cette température de 16 degrés avait conduit les graines jusqu'à leur éclosion. Dans le flacon où elles étaient s'était dégagé une quantité considérable d'humidité, et on y a trouvé en outre deux vers éclos.

La conservation de la graine au froid et à l'air est donc une pratique des plus utiles en tout temps. Il ne semble même pas qu'elle puisse devenir nuisible, car il y a des exemples de graines laissées dehors tout l'hiver au froid et à la pluie, bien mieux exposées, comme dans l'intéressante expérience de M. Bonafous (1) sur le mont Cenis, à une température de — 25 degrés longuement continuée, et qui n'en ont pas moins éclos. Nous allons voir du reste, en étudiant l'action de la chaleur, combien le froid de l'hiver est utile à la bonne éclosion de la graine.

IV. — *De l'action de la chaleur.*

Je me suis borné à étudier les effets que l'on obtient en soumettant à diverses époques la graine à une élévation de température. C'est par ce moyen, on le sait, qu'on active l'éclosion en avril et mai, au moment des éducations. En employant une chaleur plus graduellement ménagée et plus longtemps soutenue, on peut même, dans les essais précoces de la graine, avoir des vers au mois de janvier. Mais en août, lorsque la graine est fraîchement pondue, l'action de ces mêmes moyens est impuissante à provoquer l'éclosion. J'ai cherché quelles relations pouvaient avoir ces effets divers avec les diverses périodes que je venais de reconnaître dans l'activité respiratoire des œufs de ver à soie.

Dans ce but, j'ai établi une étuve à température à peu près constante, oscillant entre 22 et 24 degrés, et j'y ai introduit à diverses époques 1 gramme de graine conservé jusque-là au froid, dans une cave dont la température a varié de 4 à 10 degrés. Le premier lot a été mis à l'étuve, en septembre, aussitôt que la température moyenne extérieure fut descendue au-dessous de 20 degrés; ce lot n'a donc pas eu d'hiver. Les autres l'ont suivi à des intervalles variables, jusqu'au dernier, qui n'a été chauffé qu'au moment des éducations. Pour chacun d'eux, on a noté : 1° le temps qui s'est écoulé entre la mise à l'étuve et le commencement de l'éclosion; 2° la température moyenne pendant cet intervalle; 3° le temps de l'éclosion; 4° la proportion de graines non écloses.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 100.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VI.

Les nombres trouvés sont inscrits dans le tableau suivant :

ÉPOQUE de la mise à l'éclosion.	TEMPS après lequel a commencé l'éclosion.	TEMPÉRATURE moyenne pendant ce temps.	DURÉE de l'éclosion.	PROPORTION de graines non écloses.
1 ^{er} août	jours	23°	jours	pour 100.
15 novembre . . .	»	23	»	100
1 ^{er} décembre . . .	47	23	40	85
15 décembre . . .	30	24	40	60
1 ^{er} janvier	16	24	40	50
10 janvier	15	23	35	20
20 janvier	14	24	30	20
1 ^{er} février	12	25	26	20
12 février	11	24	18	12
20 février	10	24	14	10
8 mars	8	23	9	8
25 mars	8	23	7	8
10 avril	7	23	5	7
20 avril	7	24	4	4

Ce tableau montre d'abord que la graine du 1^{er} août, maintenue toute l'année à une température à peu près constante, n'écloît pas et périt; celle du mois de novembre est dans le même cas. Ce n'est que lorsque la graine a traversé librement l'époque de son sommeil hibernale que l'éclosion devient sensible : elle est loin, il est vrai, d'être tout d'abord complète, et à n'étudier que les nombres qui représentent la proportion des graines non écloses, il semble qu'on ne constate qu'une progression insensible dans les effets du traitement qu'elles ont subi. Il suffit de jeter un coup d'œil sur les graines elles-mêmes pour voir la différence profonde qui sépare celles d'août et du 15 novembre de toutes les autres. Les premières sont aplaties, ont conservé leur couleur normale; elles sont mortes depuis longtemps, et le microscope montre qu'il n'y a pas d'embryon formé. Dans les autres, au contraire, l'embryon est visible au travers de la coque, et donne à la graine l'aspect cendré des graines qui vont éclore. Elles allaient éclore, en effet, lorsque l'embryon s'est arrêté dans son évolution; mais cette évolution n'en est pas

moins très-avancée, et ce caractère établit une différence tranchée entre les graines qui ont été mises à l'étuve postérieurement au sommeil hiberna, et celles qui n'ont pas eu d'hiver. Chez toutes ces dernières, le travail de formation de l'embryon n'est même pas commencé; chez toutes les autres, il est presque terminé.

Il est naturel de conclure de là que non-seulement le sommeil hiberna est physiologique, mais qu'il est nécessaire pour séparer dans la vie de la graine deux périodes d'activité fonctionnelle très-différentes, dont la seconde ne peut commencer que si la première a parcouru son cours régulier et normal. La chaleur intervient pour empêcher cette hibernation; par contre, le froid la favorise, et c'est là probablement ce qui explique cette très-ancienne pratique des Chinois, qui consiste à exposer pendant l'hiver de la graine au froid, ou à la laver dans de l'eau glacée, pour obtenir ensuite au printemps une éclosion plus régulière.

On voit en effet dans le tableau que les temps de l'éclosion pour les différents lots se resserrent entre des limites de plus en plus restreintes, à mesure que l'on se rapproche davantage des conditions normales de l'éducation. Si même on avait voulu compter le temps qui s'écoule entre l'apparition des premiers vers et celle des derniers, la différence aurait été plus sensible qu'elle ne l'est dans ce tableau. Ainsi la graine mise à l'étuve le 1^{er} décembre, et qui a donné son premier ver le 4 janvier, en donnait encore le 1^{er} mai.

L'exemple de cette graine conservée pendant cinq mois à la température de 23 degrés, comparé à celui de la graine du 10 avril, qui, après avoir passé tout l'hiver au froid, a éclos entièrement au bout de huit jours d'étuve, prouve que l'éclosion d'une graine est loin de dépendre uniquement de la quantité totale de chaleur qu'elle reçoit depuis sa ponte, de quelque manière d'ailleurs qu'on évalue cette quantité. Un autre élément intervient avec une action prépondérante, c'est le travail physiologique dont la graine est le siège. Tant que ce travail n'a pas pris une certaine direction, la chaleur est sans effet: bien plus, elle est nuisible. Devient-elle utile, qu'elle n'est pas encore seule à entrer en jeu, et tout se passe comme si elle n'avait d'action sur la graine qu'à la condition d'avoir dépassé un certain minimum qui n'est pas zéro; au-dessous de ce minimum, l'effet produit, sans s'annuler, devient très-

faible. En d'autres termes, l'influence d'un degré de plus ou de moins dans la température est très-différente suivant que cette température est inférieure ou supérieure au minimum dont nous parlons.

Ce qui favorise cette manière de voir, c'est qu'en refroidissant à 4 ou 5 degrés une graine en pleine éclosion, on arrête brusquement et pendant très-longtemps le travail énergique dont elle est le siège. Ce travail se continue sourdement et finit par s'opérer; mais il faut longtemps. Veut-on lui redonner en quelques heures sa première activité, il n'y a qu'à porter de nouveau la graine à la température de 20 à 22 degrés. Deux jours suffisent alors pour terminer ce que deux mois, à la température de 4 à 5 degrés, n'auraient pas pu faire.

Cette action du froid est même souvent utilisée lorsqu'il s'agit de suspendre l'éclosion d'une graine trop avancée. L'effet est immédiat, c'est comme une horloge dont on arrête le balancier. Mais cette pratique ne compromet-elle pas la solidité de la graine, et est-elle sans influence sur le résultat de l'éducation? c'est ce que je me suis proposé de rechercher en suspendant l'éclosion d'une graine, soit pendant un ou deux mois, soit pendant un ou deux jours.

Dans une première expérience, j'ai exposé le 1^{er} mars au laboratoire, à 15 degrés environ, un gramme de graine. Le 6 avril, il y avait 120 vers éclos. La graine portée à la cave, à 4 degrés, l'éclosion s'est immédiatement arrêtée et n'a repris que le 10 mai. 1000 graines de ce lot ont fourni 600 vers éclos, réduits à 350 à la première mue, et qui n'ont donné que 250 cocons. La graine a donc beaucoup perdu à être exposée au froid, et arrêtée aussi longtemps dans son éclosion. Le quart des graines a péri. Les vers eux-mêmes ont été atteints, et la mortalité a surtout sévi entre leur naissance et leur première mue.

Mais l'éducation n'a pas échoué, et, avec ce rendement là, faite en grand, avec une quantité suffisante de graine, elle serait encore rémunératrice. Au point de vue pratique, l'effet a donc été peu marqué. Il l'est encore moins au point de vue pratique et théorique, si on se contente de suspendre par le froid l'éclosion pendant un ou deux jours.

De la graine a été partagée la veille de l'éclosion en deux lots, dont l'un a été laissé à la température de 25 degrés, et a éclos le lendemain, et l'autre, porté à la cave à 12 degrés, où il a été abandonné depuis deux jours, pendant lesquels il n'a pas donné un seul ver. Rapporté à

l'étuve, il a éclos comme à l'ordinaire, et les vers ont été élevés côte à côte avec ceux de l'autre lot. Voici les résultats fournis par l'éducation :

Graine normale...	1000	graines	ont	fourni	875	vers	éclos	et	820	cocons.
Graine refroidie...	1000	»	»	»	875	»	»	»	810	»

L'identité est aussi parfaite que possible, et on voit qu'il n'y a aucun inconvénient à retarder de quelques jours l'éclosion d'une graine.

Tels sont aussi brièvement résumés que possible les résultats fournis par cette étude. Je ne me dissimule pas qu'ils n'apprennent qu'une très-faible partie de ce qu'il faudrait savoir, et j'ai l'intention de continuer ce travail ; mais ils composent actuellement au point de vue théorique un tout assez complet, et fourniront peut-être des renseignements utiles à la pratique.

C'est pour cela que je les ai publiés.



SUR CERTAINS SYSTÈMES

DE

POLYNÔMES ASSOCIÉS,

PAR M. F. DIDON,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

I.

Soit une série indéfinie de polynômes

$$U_{0,\lambda}, U_{1,\lambda}, U_{2,\lambda}, \dots, U_{\mu,\lambda}, \dots$$

des degrés respectifs $0, 1, 2, \dots, \mu, \dots$; je dirai que les polynômes de la série indéfinie

$$V_{0,\lambda}, V_{1,\lambda}, V_{2,\lambda}, \dots, V_{\nu,\lambda}, \dots$$

sont associés aux premiers, si l'on a, quels que soient les nombres entiers μ et ν , pourvu qu'ils soient inégaux,

$$\int_0^1 U_{\mu,\lambda} V_{\nu,\lambda} dx = 0.$$

J'assujettis, en premier lieu, les degrés des fonctions entières de la seconde série à procéder suivant la suite naturelle des nombres $0, 1, 2, 3, \dots$; et, pour exprimer cette condition, je fais égal à 1 l'indice λ ; je dis qu'alors les polynômes $U_{0,1}, U_{1,1}, U_{2,1}, \dots$ de la première série sont égaux, à des facteurs constants près, aux polynômes correspon-

dants de la seconde série $V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, \dots$. En effet, l'égalité supposée

$$\int_0^1 U_{\mu,1} V_{\nu,1} dx = 0$$

conduit à la suivante

$$\int_0^1 U_{\mu,1} \varphi(x) dx = 0,$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme qui ne surpasse pas le degré $\mu - 1$. Il en résulte que, dans la relation évidente

$$U_{\mu,1} = A_0 V_{0,1} + A_1 V_{1,1} + A_2 V_{2,1} + \dots + A_\mu V_{\mu,1},$$

le coefficient A_k de $V_{k,1}$ est déterminé par l'équation

$$A_k \int_0^1 V_{k,1} U_{k,1} dx = \int_0^1 U_{\mu,1} U_{k,1} dx,$$

et par conséquent est nul, si k est inférieur à μ . Donc

$$U_{\mu,1} = A_\mu V_{\mu,1}.$$

On voit de suite que

$$U_{m,1} = V_{m,1} = k \frac{d^m x^m (x-1)^m}{dx^m},$$

où k est une constante, et que ces deux fonctions se changent en la fonction X_m de Legendre, si l'on remplace x par $\frac{1+x}{2}$.

Mais on peut trouver des séries différentes de polynômes associés, les termes de la seconde série n'étant plus des degrés respectifs 0, 1, 2, 3, Je suppose d'abord $\lambda = 2$, et je détermine, à un facteur constant près, chaque fonction $U_{\mu,2}$ de la première série $U_{0,2}, U_{1,2}, \dots$ par les conditions suivantes,

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_{\mu,2} dx &= 0, & \int_0^1 U_{\mu,2} x^2 dx &= 0, \\ \int_0^1 U_{\mu,2} x^4 dx &= 0, \dots, & \int_0^1 U_{\mu,2} x^{2\mu-2} dx &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$U_{\mu,1} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_\mu x^\mu,$$

on aura le système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{1} + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+1} &= 0, \\ \frac{A_0}{3} + \frac{A_1}{4} + \frac{A_2}{5} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+3} &= 0, \\ \frac{A_0}{5} + \frac{A_1}{6} + \frac{A_2}{7} + \dots + \frac{A_\mu}{\mu+5} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{A_0}{2\mu-1} + \frac{A_1}{2\mu} + \frac{A_2}{2\mu+1} + \dots + \frac{A_\mu}{3\mu-1} &= 0. \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, je remarque que l'expression

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \dots + \frac{A_\mu}{x+\mu}$$

s'annule pour $x = 1, 3, 5, \dots, 2\mu - 1$. Donc on a, à un facteur constant près,

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \dots + \frac{A_\mu}{x+\mu} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)\dots(x-2\mu+1)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+\mu)}.$$

Pour obtenir A_i , je multiplie l'identité précédente par $x+i$, et j'y fais ensuite $x = -i$, il vient alors

$$A_i = (-1)^{\mu-i} \frac{(i+1)(i+3)(i+5)\dots(i+2\mu-1)}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots(\mu-i)},$$

et par suite, en multipliant chaque terme par $(-1)^{\mu+2i}$,

$$U_{\mu,1} = \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^i \frac{(i+1)(i+3)(i+5)\dots(i+2\mu-1)}{1.2.3\dots i.1.2.3\dots(\mu-i)} x^i.$$

La première série de polynômes étant ainsi déterminée, il est facile

de voir qu'on formera une série de polynômes associés en posant

$$V_{\mu,1} = \frac{d^{\mu} x^{\mu} (x^2 - 1)^{\mu}}{dx^{\mu}}.$$

Pour le démontrer, je remarque d'abord que le polynôme $V_{\mu,1}$ est du degré 2μ et n'a que des termes de degré pair. Or, la manière dont nous avons déterminé $U_{\mu,1}$ montre que $\int_0^1 U_{\mu,1} \varphi(x^2) dx = 0$, si $\varphi(x)$ est un polynôme ne surpassant pas le degré $\mu - 1$; par conséquent

$$\int_0^1 U_{\mu,1} V_{\nu,1} dx = 0,$$

si ν est inférieur à μ . Mais, si ν est supérieur à μ , comme

$$\int_0^1 F(x) \frac{d^{\nu} x^{\nu} (x^2 - 1)^{\nu}}{dx^{\nu}} dx = (-1)^{\nu} \int_0^1 x^{\nu} (x^2 - 1)^{\nu} \frac{d^{\nu} F(x)}{dx^{\nu}} dx,$$

on voit que l'intégrale précédente est encore nulle, car la dérivée d'ordre ν de la fonction $U_{\mu,1}$ sera égale à 0.

Supposons maintenant $\lambda = 3$, et déterminons chaque fonction $U_{\mu,3}$ de la série $U_{0,3}, U_{1,3}, \dots$ par les conditions

$$\int_0^1 U_{\mu,3} dx = 0, \quad \int_0^1 U_{\mu,3} x^2 dx = 0, \quad \int_0^1 U_{\mu,3} x^4 dx = 0, \dots,$$

$$\int_0^1 U_{\mu,3} x^{2\mu-3} dx = 0.$$

On trouvera en suivant la marche précédente

$$U_{\mu,3} = \sum (-1)^i \frac{(i+1)(i+4)(i+7) \dots (i+3\mu-2)}{1.2.3 - i.1.2.3 \dots (\mu-i)} x^i,$$

et l'on voit que l'on formera une série de polynômes associés en prenant

$$V_{\mu,3} = \frac{d^{\mu} x^{\mu} (x^3 - 1)^{\mu}}{dx^{\mu}}.$$

Et de même pour $\lambda = 4, 5, 6, \dots$

II.

Il est facile de voir que les équations obtenues en égalant à 0 les divers polynômes de degré μ , $U_{\mu,2}$, $U_{\mu,3}$,... ont toutes les racines réelles et comprises entre 0 et 1. Pour le démontrer, je me servirai de la belle méthode employée par Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral*, à l'égard des fonctions X_n .

Je rappelle l'égalité $\int_0^1 U_{\mu,2} \varphi(x^2) dx = 0$, où $\varphi(x)$ est au plus du degré $\mu - 1$. Comme $\int_0^1 U_{\mu,2} dx = 0$, il faut que $U_{\mu,2}$ change au moins une fois de signe dans l'intervalle de 0 à 1; de là résulte l'existence d'une racine a comprise entre 0 et 1, et l'on a par conséquent

$$U_{\mu,2} = (x - a)P.$$

Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,2} (x^2 - a^2) dx = 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_0^1 P (x - a)^2 (x + a) dx = 0.$$

Donc, puisque $(x - a)^2$ et $(x + a)$ ne changent pas de signe entre 0 et 1, il faut que P en change au moins une fois, et l'on a $P = (x - b)Q$, b étant compris entre 0 et 1. Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,2} (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) dx = 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 Q (x - a)^2 (x - b)^2 (x + a)(x + b) dx = 0.$$

Donc Q s'annule au moins une fois entre 0 et 1, etc., et la proportion est démontrée pour la fonction $U_{\mu,2}$. Relativement à la fonction $U_{\mu,3}$, je rappelle que $\int_0^1 U_{\mu,3} \varphi(x^3) dx = 0$, si $\varphi(x)$ ne dépasse pas le degré $\mu - 1$.

De l'égalité $\int_0^1 U_{\mu,3} dx = 0$, on conclut que $U_{\mu,3}$ doit s'annuler au

moins une fois entre 0 et 1, et que par suite l'on a

$$U_{\mu,3} = (x - a) P.$$

Mais

$$\int_0^1 U_{\mu,3} (x^3 - a^3) dx = 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_0^1 P (x - a)^2 (x^2 + ax + a^2) dx = 0.$$

Donc, puisque les facteurs $(x - a)^2$ et $x^2 + ax + a^2$ sont toujours positifs entre 0 et 1, il faut que P change de signe dans cet intervalle, et l'on a $P = (x - b) Q$, b étant un nombre compris entre 0 et 1. On a encore

$$\int_0^1 U_{\mu,3} (x^3 - a^3) (x^3 - b^3) dx = 0,$$

ou bien

$$\int_0^1 Q (x - a)^2 (x - b)^2 (x^2 + ax + a^2) (x^2 + bx + b^2) dx = 0.$$

Par conséquent, Q doit encore changer de signe entre 0 et 1, etc.

Quant aux fonctions $V_{\mu,2}, V_{\mu,3}, \dots$, on voit immédiatement, par l'application du théorème de Rolle, qu'elles s'annulent μ fois entre 0 et 1.

III.

Les polynômes $U_{\mu,2}, U_{\mu,3}, U_{\mu,4}, \dots$ peuvent être définis autrement que nous l'avons fait. A l'égard des polynômes $U_{\mu,2}$, on peut remarquer que le système d'équations du premier degré qui nous a servi à en déterminer les coefficients exprime que, dans le développement du produit $U_{\mu,2} \log \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, manquent les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^{2\mu-1}}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \quad U_{\mu,2} \log \left(1 - \frac{1}{x}\right) = R + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^6} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu}} + \frac{H}{x^{2\mu+1}} + \dots,$$

R étant un polynôme entier. Cette relation définit complètement le polynôme $U_{\mu,2}$, à un facteur constant près. Si l'on change x en $-x$, on

obtient, en représentant $U_{\mu,2}$ par $\varphi(x)$,

$$(2) \quad \varphi(-x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = R' + \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^5} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu}} - \frac{H}{x^{2\mu+1}} + \dots,$$

R' étant aussi un polynôme; d'où, en retranchant,

$$(3) \quad \varphi(x) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \varphi(-x) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = P + \frac{2H}{x^{2\mu+1}} + \frac{2I}{x^{2\mu+3}} + \dots,$$

P étant encore un polynôme entier.

L'égalité (1) permet de trouver certaines relations entre les fonctions consécutives $U_{\mu,2}$, $U_{\mu-1,2}$, etc. Si on la multiplie par x^2 , il vient,

$$x^2 U_{\mu,2} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \text{polynôme} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^4} + \dots + \frac{G}{x^{2\mu-2}} + \frac{H}{x^{2\mu-1}} + \dots$$

On en conclut

$$x^2 U_{\mu,2} = L U_{\mu+2,2} + M U_{\mu+1,2} + N U_{\mu,2} + S U_{\mu-1,2}.$$

Il ne peut pas y avoir d'autres termes dans le second membre, car ils introduiraient dans la multiplication par $\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ des puissances $2\mu - 3$, $2\mu - 5$ de $\frac{1}{x}$.

De même on trouverait

$$(x^3 - x) \frac{dU_{\mu,2}}{dx} = L' U_{\mu+2,2} + M' U_{\mu+1,2} + N' U_{\mu,2} + S' U_{\mu-1,2},$$

L' , N' , N' , S' étant des constantes bien faciles à déterminer.

Enfin de l'égalité (1), on peut déduire aussi une équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait la fonction $U_{\mu,2}$. Cette équation, qu'on peut du reste trouver au moyen de l'expression que nous avons donnée de $U_{\mu,2}$, est la suivante

$$(4) \quad (x^3 - x) \frac{d^3 y}{dx^3} + (5x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - (\mu - 1)(3\mu + 4)x \frac{dy}{dx} + \mu(\mu - 1)(2\mu + 1)y = 0.$$

Elle ne caractérise pas la fonction $U_{\mu,2}$; car, si l'on ne tient compte que des fonctions entières, elle a pour solution un polynôme du degré μ .

avec deux constantes arbitraires, ou, si l'on aime mieux, deux polynômes, l'un du degré μ , l'autre du degré $\mu - 1$.

On verra de même que la fonction $U_{\mu,3} = \psi(x)$ satisfait à l'égalité

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) &= R + \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^4} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \dots \\ &+ \frac{I}{x^{3\mu-1}} + \frac{J}{x^{3\mu}} + \frac{K}{x^{3\mu+1}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

R étant un polynôme, et $A, B, C, D, E, \dots, I, J, K$ des constantes. Cette égalité, qui caractérise, à un facteur constant près, le polynôme $\psi(x)$ de degré μ , conduit à la suivante, où α et α^2 sont les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et P un polynôme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x) \log \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \alpha \psi(\alpha x) \log \left(1 - \frac{1}{\alpha x} \right) - (\alpha + 1) \psi(\alpha^2 x) \log \left(1 - \frac{1}{\alpha^2 x} \right) \\ = P + \frac{K}{x^{3\mu+1}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire que le développement du premier membre, suivant les puissances décroissantes de x , manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^{3\mu}}$. On trouve facilement, pour la fonction $\psi(x) = y$, l'équation différentielle du quatrième ordre

$$\begin{aligned} (x^4 - x) \frac{d^4 y}{dx^4} + (10x^3 - 1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 6(\mu - 2)(\mu + 2)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + 2(\mu - 1)(\mu - 2)(4\mu + 3)x \frac{dy}{dx} - \mu(\mu - 1)(\mu - 2)(3\mu + 1)y = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite par trois polynômes des degrés respectifs $\mu, \mu - 1, \mu - 2$.

La forme de dérivées d'ordre μ , que nous avons donnée aux fonctions $V_{\mu,2}, V_{\mu,3}, \dots$, permet de former immédiatement des équations différentielles auxquelles ces fonctions satisfont. On trouve : pour $V_{\mu,2}$,

$$(x^3 - x) \frac{d^3 y}{dx^3} + 2(3x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3(\mu - 1)(\mu + 2)x \frac{dy}{dx} - 2\mu(\mu + 1)(\mu + 2)y = 0;$$

pour $V_{\mu,2}$,

$$\begin{aligned} (x^4 - x) \frac{d^4 y}{dx^4} + 3(4x^3 - 1) \frac{d^3 y}{dx^3} - 6(\mu - 2)(\mu + 3)x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \\ - 4(\mu + 2)(\mu + 3)(2\mu - 1)x \frac{dy}{dx} - 3\mu(\mu + 1)(\mu + 2)(\mu + 3)y = 0. \end{aligned}$$

IV.

Je vais donner ici les fonctions génératrices des divers systèmes de polynômes U et V pour les indices $\lambda = 2, 3, 4, \dots$. En premier lieu, je vais calculer $\sum_{p=0}^{\infty} a^p U_{p,2}, \dots$. On voit que le coefficient de x^i , dans cette somme, sera égal à

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} \sum_{\mu=i}^{\infty} \frac{(i+1)(i+3)(i+5) \dots (i+2\mu-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-i)} a^\mu \\ = (-1)^i \frac{(i+1)(i+3) \dots (3i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} a^i \\ \times \left[1 + \frac{3i+1}{1} a + \frac{(3i+1)(3i+3)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{(3i+1)(3i+3)(3i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

L'expression qui se trouve entre parenthèses peut s'écrire

$$1 + \frac{3i+1}{2} (2a) + \frac{(3i+1)(3i+3)}{2 \cdot 4} (2a)^2 + \frac{(3i+1)(3i+3)(3i+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6} (2a)^3 + \dots,$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est égale à

$$(1 - 2a)^{-\frac{3i+1}{2}}.$$

Le coefficient de x^i est donc

$$(-a)^i \frac{(i+1)(i+3) \dots (3i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i} (1 - 2a)^{-\frac{3i+1}{2}},$$

ou bien

$$\frac{(-a)^i}{1.2.3\dots i} \cdot \frac{d^i(1-2a)^{-\frac{i+1}{2}}}{da^i},$$

et la fonction génératrice que nous cherchons est égale à

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-ax)^i}{1.2.3\dots i} \frac{d^i \left(\frac{1}{\sqrt{1-2a}} \right)^{i+1}}{da^i}.$$

Pour faire cette somme, il n'y a plus qu'à employer la formule de Lagrange. On trouve ainsi, pour la fonction génératrice cherchée, l'expression $\frac{1}{a} \frac{dz}{dx}$, z étant la racine de l'équation

$$z = a - \frac{ax}{\sqrt{1-2z}},$$

qui, pour $x = 0$, se réduit à a .

Pour les autres systèmes des fonctions U , on est conduit aux équations

$$z = a - \frac{ax}{\sqrt[3]{1-3z}}, \quad z = a - \frac{ax}{\sqrt[4]{1-4z}}, \dots,$$

qui donnent, pour $-\frac{1}{a} \frac{dz}{dx}$, les fonctions génératrices cherchées.

On sait que, pour le système $U_{0,1}$, $U_{1,1}$, $U_{2,1}, \dots$, on est conduit à l'équation $z = a - \frac{ax}{1-2z}$, qui rentre complètement dans le type des précédentes.

La forme analytique des divers systèmes de polynômes V permet d'en trouver immédiatement les fonctions génératrices. Ces fonctions sont, pour $i = 1, 2, 3, \dots$, les dérivées par rapport à x des racines des équations

$$z = x + az(z-1), \quad z = x + az(z^2-1), \quad z = x + az(z^3-1), \dots,$$

qui deviennent égales à x pour $a = 0$.

V.

On a dû remarquer, dans le paragraphe III, les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions $U_{\mu,2}$, $U_{\mu,3}$, La première, du troisième ordre, est satisfaite par deux polynômes; la seconde, du quatrième ordre, par trois polynômes. Ces équations ne sont que des cas particuliers d'équations beaucoup plus générales, qui ont été données par M. Hermite, dans son Cours à l'École Polytechnique (2^e année, page 19), et qui jouissent de cette propriété remarquable, que l'équation d'ordre n est satisfaite par $n - 1$ polynômes. Je me bornerai au cas du troisième ordre. L'équation correspondante est

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \frac{d^3 \gamma}{dx^3} \\ & - [(\mu+\alpha-2)(x-b)(x-c) + (\mu+\beta-2)(x-a)(x-c) + (\mu+\gamma-2)(x-a)(x-b)] \frac{d^2 \gamma}{dx^2} \\ & + (\mu-1)[(\mu+\beta+\gamma-2)(x-a) + (\mu+\alpha+\gamma-2)(x-b) + (\mu+\alpha+\beta-2)(x-c)] \frac{d \gamma}{dx} \\ & - (\mu-1)\mu(\mu+\alpha+\beta+\gamma-2)\gamma = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle admet pour solutions, lorsque μ est entier et positif, deux polynômes qui sont donnés par les intégrales

$$\int_a^b (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} (z-x)^{\mu} dz$$

et

$$\int_a^c (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} (z-c)^{\gamma-1} (z-x)^{\mu} dz,$$

quand α, β, γ , sont positifs. On voit par là que cette équation (1) est une généralisation de l'équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfont la série hypergéométrique de Gauss et, comme cas particulier, la fonction X_n de Legendre. De l'équation (1), on déduit l'équation (4) du paragraphe III, en faisant

$$a=0, \quad b=1, \quad c=-1, \quad \alpha=-(\mu-1), \quad \beta=-\mu, \quad \gamma=-\mu.$$

Je vais tirer de cette équation la relation (3) du même paragraphe,

en employant une méthode tout à fait semblable à celle dont on se sert pour déduire, de l'équation différentielle de la fonction X_n , la relation

$$X_n \log \frac{x-1}{x+1} = \text{polynôme} + \frac{\alpha}{x^{n+1}} + \dots$$

Pour cela, je considère l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$(2) \quad \varphi(x) \frac{d^3 y}{dx^3} + \varphi'(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + L \frac{dy}{dx} + M y = 0.$$

On peut, par la multiplication, avec un facteur convenable, mettre toute équation linéaire du troisième ordre sans second membre sous cette forme.

Soient P et Q deux intégrales particulières de cette équation (2). En appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on trouve pour troisième solution

$$(3) \quad y = P \int \frac{Q dx}{\varphi(x) \left(Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} \right)} - Q \int \frac{P dx}{\varphi(x) \left(\varphi \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} \right)}.$$

Il intervient sous les signes \int le carré de la quantité $Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} = F(x)$.

Je vais faire ici une remarque curieuse, bien qu'elle n'ait pas de rapport direct avec la question qui nous occupe. Par un calcul très-facile, on trouve que la fonction $F(x) = y$ satisfait à l'équation linéaire du troisième ordre

$$(4) \quad \varphi(x) \frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \varphi'(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\varphi''(x) + L] \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dL}{dx} - M \right) y = 0.$$

Si l'on appelle Q' et P' deux de ses solutions, et qu'on cherche à former une équation différentielle à laquelle satisfasse $z = Q' \frac{dP'}{dx} - P' \frac{dQ'}{dx}$, on trouve pour cette équation

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi^2(x) \frac{d^3 z}{dx^3} + 4 \varphi(x) \varphi'(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \\ + [3 \varphi(x) \varphi''(x) + 2 \varphi'^2(x) + \varphi(x) L] \frac{dz}{dx} \\ + [\varphi(x) \varphi'''(x) + \varphi(x) M + \varphi'(x) \varphi''(x) + \varphi'(x) L] z = 0. \end{cases}$$

Or on déduit cette équation (5) de l'équation (2), en posant $y = \varphi(x)z$.

Mais revenons à notre question. Dans le cas de l'équation (1), on a

$$\varphi(x) = (x-a)^{-\mu-\alpha+1}(x-b)^{-\mu-\beta+1}(x-c)^{-\mu-\gamma+1}.$$

Comme on suppose μ entier et positif, on pourra considérer P et Q comme deux polynômes solutions de l'équation (1). Admettons que α ,

β , γ , soient entiers, de telle sorte que les expressions $\frac{Q}{\varphi(x)F^2(x)}$,

$\frac{P}{\varphi(x)F^2(x)}$ soient des fractions rationnelles; nous allons les décomposer

en fractions simples. Considérons d'abord la première. Soit α une racine quelconque de l'équation $F(x) = 0$; on aura d'abord une série de

fractions de la forme $\frac{A}{(x-\alpha)^2}$, $\frac{A'}{x-\alpha}$, se rapportant aux diverses ra-

cines α de l'équation $F(x) = 0$. A et A' seront les coefficients respec-

tifs des termes en $\frac{1}{z^2}$ et $\frac{1}{z}$ dans le développement, suivant les puissances

croissantes de z , de l'expression $\frac{Q(\alpha+z)}{\varphi(\alpha+z)F^2(\alpha+z)}$. On trouve de cette

façon

$$A = \frac{Q(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'^2(\alpha)}, \quad A' = \frac{Q'(\alpha)\varphi(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)\varphi'(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)\varphi(\alpha)F''(\alpha)}{\varphi^2(\alpha)F'^3(\alpha)}.$$

Mais, si l'on remplace successivement dans l'équation (2) y par P et Q,

puis qu'on multiplie les équations résultantes respectivement par Q et

P, et enfin qu'on retranche les résultats, il vient

$$LF(x) + \varphi'(x)F'(x) + \varphi(x)\left[F''(x) - \frac{dQ}{dx}\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{dP}{dx}\frac{d^2Q}{dx^2}\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(\alpha)F'(\alpha) + \varphi(\alpha)F''(\alpha) = \varphi(\alpha)[Q'(\alpha)P''(\alpha) - P'(\alpha)Q''(\alpha)].$$

Donc

$$A' = \frac{Q'(\alpha)F'(\alpha) - Q(\alpha)Q'(\alpha)P''(\alpha) + Q(\alpha)P'(\alpha)Q''(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'^3(\alpha)}.$$

Si l'on remplace, dans A', $F'(\alpha)$ par sa valeur $Q(\alpha)P''(\alpha) - P(\alpha)Q''(\alpha)$,

il vient finalement

$$A' = \frac{Q''(\alpha)[Q(\alpha)P'(\alpha) - P(\alpha)Q'(\alpha)]}{\varphi(\alpha)F'(\alpha)} = \frac{Q''(\alpha)F(\alpha)}{\varphi(\alpha)F'(\alpha)} = 0.$$

Par conséquent, si l'on fait abstraction des facteurs simples correspondants à $\varphi(x)$, la troisième solution y est une fonction algébrique et même entière, car la partie

$$\frac{Q(\alpha)P}{\varphi(\alpha)F'(\alpha)(x-\alpha)} - \frac{P(\alpha)Q}{\varphi(\alpha)F'(\alpha)(x-\alpha)}$$

de l'intégrale qui se rapporte à la racine α , se réduit à un polynôme, attendu que $Q(\alpha)P - P(\alpha)Q$ est divisible par $x - \alpha$.

Il reste à considérer les fractions simples qui correspondent à $\varphi(x)$. Je prends le cas de $\alpha = -(\mu - 1)$, $\beta = \gamma = -\mu$, $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$; alors $\varphi(x) = x(x-1)^2(x+1)^2$. Les fractions simples ayant pour dénominateur $(x-1)^2$ ou $(x+1)^2$ donnent dans l'intégrale y des parties entières en x . Soient $\frac{A}{x}$, $\frac{B}{x-1}$, $\frac{C}{x+1}$ les autres fractions simples qui se rapportent à la première fraction rationnelle, $\frac{A'}{x}$, $\frac{B'}{x-1}$, $\frac{C'}{x+1}$ celles qui se rapportent à la seconde fraction rationnelle. On a évidemment

$$A + B + C = 0, \quad A' + B' + C' = 0,$$

de sorte que finalement on conclut l'égalité

$$y = \text{polynôme} + (BP - B'Q) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) + (CP - C'Q) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Mais on voit immédiatement que le développement de y , suivant les puissances décroissantes de x , ne commence qu'au terme en $\frac{1}{x^{2\mu+1}}$, et qu'il ne contient que des termes de degré impair, si l'on suppose que P et Q soient les deux polynômes de degrés μ et $\mu - 1$, l'un pair et l'autre impair, qui satisfont à l'équation différentielle. Le second membre devant changer de signe sans changer de valeur absolue, si l'on y remplace x par $-x$, on en conclut qu'en posant $BP - B'Q = \varpi(x)$, on a $C'P - C'Q = -\varpi(-x)$ et on retrouve ainsi l'équation (4) du paragraphe III.

De cette dernière équation, on pourrait déduire toutes les propriétés que nous avons données de la fonction $\varpi(x)$; je n'insiste pas là-dessus.

Ce n'est pas seulement dans le cas que nous venons d'examiner, qu'on trouve une équation analogue à cette équation (4). Si l'on suppose α , β , γ déterminés de telle sorte que l'on ait

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

on trouve, en posant

$$U = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)F'(a)} \log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)F'(b)} \log\left(1 - \frac{b}{x}\right) \\ + \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)F'(c)} \log\left(1 - \frac{c}{x}\right)$$

et

$$V = \frac{Q(a)}{(a-b)(a-c)F(a)} \log\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \dots,$$

$$PV - QU + R = \frac{\alpha}{x^{\mu-1}} + \dots,$$

R étant un polynôme entier

L'équation différentielle (1) du paragraphe V jouit de certaines propriétés curieuses; ainsi, dans le cas où μ est un nombre entier négatif égal à $-n$, elle est satisfaite par

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}(x-c)^{n-1}}{dx^{n-1}};$$

mais ceci n'a pas de rapport à la question qui fait l'objet de cet article.



LETTRES

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR C.-G.-J. JACOBI.

Nous devons à l'obligeance de M. Alfred Arago la précieuse communication de onze lettres inédites de JACOBI à LEGENDRE sur la théorie des Fonctions Elliptiques. Quoique les découvertes qu'elles contiennent soient aujourd'hui bien connues des Géomètres, ils étudieront sans doute avec un vif intérêt la forme que leur donne l'illustre inventeur; on prendra plaisir à voir Jacobi, avec une modestie digne de son talent, s'incliner devant l'illustre vieillard qu'il a déjà dépassé de si loin, et saluer en même temps par de véritables cris d'admiration les premiers résultats du jeune émule qui vient tout à coup partager sa gloire. « La découverte d'Abel, dit-il, est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux. »

Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, dont la sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à l'injustice.

J. BERTRAND.

Kœnigsberg, en Prusse, le 5 août 1827.

MONSIEUR,

Un jeune Géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des Fonctions Elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que

cette partie brillante de l'Analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les Géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance.

Je commence à exposer les moments principaux des résultats que je viens d'obtenir. Soit p un nombre impair quelconque; on remarque aisément en poursuivant les théorèmes concernant la multiplication des Fonctions Elliptiques de première espèce, proposés dans le tome I des *Exercices de Calcul intégral*, que l'on peut toujours parvenir à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2x^2}} = \frac{p dz}{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2z^2}}$$

au moyen d'une substitution rationnelle

$$x = \frac{z \left(A + A' z^2 + A'' z^4 + \dots + A^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1} \right)}{B + B' z^2 + B'' z^4 + \dots + B^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}}.$$

J'ai observé, depuis, que cette substitution peut être remplacée par les deux autres, employées successivement :

$$x = \frac{r \left(a + a' r^2 + a'' r^4 + \dots + a^{\frac{p-1}{2}} r^{p-1} \right)}{b + b' r^2 + b'' r^4 + \dots + b^{\frac{p-1}{2}} r^{p-1}},$$

$$r = \frac{z \left(\alpha + \alpha' z^2 + \alpha'' z^4 + \dots + \alpha^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1} \right)}{\beta + \beta' z^2 + \beta'' z^4 + \dots + \beta^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}}.$$

Après une première substitution, la Fonction Elliptique va être transformée dans une autre de module différent, de sorte qu'on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2x^2}} = \frac{M dy}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 y^2}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 y^2}} = \frac{p dz}{M \sqrt{1-z^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 z^2}}.$$

Or, en donnant au nombre p des valeurs différentes, on trouve le théorème remarquable, que *chaque module donné fait part d'une infinité d'échelles de modules, dans lesquels il peut être transformé par une substitution algébrique et même rationnelle.*

Aussi je suis parvenu à trouver l'expression générale de ces deux substitutions-là, que je présenterai sous la forme trigonométrique, qui me paraît la plus commode. Elles pourront être transformées aisément dans la forme algébrique mentionnée. Je commence par la substitution dernière, qui me fournit le théorème suivant :

THÉORÈME I (*).

- Soit pris l'angle φ' de manière qu'on ait $F(x, \varphi') = \frac{1}{p} F'(x)$, et
- nommons en général φ^m un angle tel que $F(x, \varphi^m) = \frac{m}{p} F'(x)$. Cher-
- chons un angle ψ au moyen de la formule

$$\operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right) = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi' + \varphi}{2}} \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi'' + \varphi}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi'' - \varphi}{2}} \cdots \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi^{p-2} \pm \varphi}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi^{p-2} \mp \varphi}{2}} \left(\operatorname{tang} 45^\circ \mp \frac{\varphi}{2} \right),$$

- on aura $F(x, \varphi) = \frac{M}{p} F(\lambda, \psi)$. Le signe supérieur ou inférieur doit
- être pris selon que p est de la forme $4n + 1$ ou de la forme $4n - 1$.
- Toutefois que φ se trouve entre les limites φ^m et φ^{m+1} , il faudra
- prendre l'angle ψ entre les limites $-\frac{m\pi}{2}$ et $-\frac{m-1}{2}\pi$. La détermi-
- nation des constantes M, λ pourra se faire par les formules

$$M = \frac{p}{2 \left(\operatorname{coséc} \varphi' - \operatorname{coséc} \varphi'' + \dots \mp \operatorname{coséc} \varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2} \right)},$$

$$\lambda = \frac{2xM}{p} \left(\sin \varphi' - \sin \varphi'' + \dots \mp \sin \varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2} \right).$$

(*) Je me servirai ici et dans la suite des signes des *Exercices de Calc. I.*

Je passe à présent au théorème II, qui répond à l'autre substitution, par laquelle on peut passer du module λ au module κ , et qui, joint au précédent, sert à la multiplication des Fonctions Elliptiques de première espèce.

THÉORÈME II.

• Soit $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, soit en général ψ^m un angle tel, que

$$F(\lambda', \psi^m) = \frac{m}{p} F'(\lambda'),$$

• qu'on fasse

$$\begin{aligned} \text{tang } \theta' &= \text{tang } \psi \text{ coséc } \psi', & \text{tang } \theta'' &= \text{tang } \psi \text{ coséc } \psi'', \dots, \\ \text{tang } \theta^{p-2} &= \text{tang } \psi \text{ coséc } \psi^{p-2}; \end{aligned}$$

• soit enfin $\theta = 2\left(\theta' - \theta'' + \theta''' - \dots \mp \theta^{p-2} \pm \frac{\psi}{2}\right)$, on aura

$$F(\kappa, \theta) = MF(\lambda, \psi).$$

• Les angles θ', θ'', \dots doivent être pris dans le même quadrant de cercle dans lequel se trouve l'angle ψ . •

Les théorèmes I et II joints ensemble donnent $F(\vartheta, \theta) = p F(\kappa, \varphi)$.

Je passe sous silence les nombreuses relations analytiques très-curieuses, que vont fournir les deux théorèmes proposés. Je n'ajouterai ici qu'une méthode, qui peut servir à l'évaluation des transcendentes $F(\kappa, \varphi)$, la plus commode, à ce que je crois, qu'on puisse imaginer.

En effet, λ se trouvant toujours très-petit, quand même le nombre p ne surpasse 5 ou 7, on pourra négliger les termes de l'ordre λ^2 . On aura donc simplement $F(\kappa, \varphi) = \frac{M}{p} \psi$. La constante M ne différant que de l'ordre λ^2 de la quantité $\frac{2}{\pi} F'(\kappa)$, on introduira celle ci dans le calcul au lieu de M . Par là on aura en même temps corrigé le résultat de la partie non périodique de l'erreur commise en négligeant les quantités de cet ordre. Notre formule deviendra donc $F(\kappa, \varphi) = \frac{2}{p\pi} F'(\kappa) \psi$, et

l'erreur commise ne comportera que $-\frac{\lambda^1}{4p\pi} F'(x) \sin 2\psi$. C'est donc la correction à ajouter pour que l'erreur ne soit que de l'ordre λ^1 (*).

Soit, par exemple, $p = 5$, $x = \sin 45^\circ$, je trouve dans le tome III des *Exercices*, p. 215, $\varphi' = 21^\circ 0' 36''$, 0275443 , $\varphi'' = 58^\circ 38' 10''$, 3140270 . Aussi la Table II du tome III me donne $F'(x) = 1,854074677301$, d'où résulte

$$M' = \frac{F'(x)}{5,324000} 0,000001144490541544.$$

On aura donc à calculer l'angle ψ'' par la formule

$$\operatorname{tang} \frac{90^\circ - \psi''}{2} = \frac{\operatorname{tang} \left(10^\circ 30' 18'', 01 - \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tang} \left(29^\circ 19' 5'', 16 + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tang} \left(10^\circ 30' 18'', 01 + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tang} \left(29^\circ 19' 5'', 16 - \frac{\varphi}{2} \right)} \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

et ensuite on trouvera

$$F(\varphi) = 0,000001144490541\psi.$$

La correction à ajouter sera $-0,00000007 \cdot \sin 2\psi''$.

EXEMPLE. $\varphi = 30^\circ$:

$$\log \operatorname{tang} \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 8,89549.90$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{\varphi'' + \varphi}{2} = 9,98966.16$$

$$\log \cot \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 0,32140.63$$

$$\log \cot \frac{\varphi'' - \varphi}{2} = 0,59306.27n$$

$$\log \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 9,76143.94$$

$$\log \operatorname{tang} \left(45^\circ - \frac{\psi''}{2} \right) = 9,56106.90n$$

$$45^\circ - \frac{\psi''}{2} = -20^\circ 0' 0'', 473$$

(*) Si l'on exprime ψ en secondes, on aura $F(x, \varphi) = M'\psi$, étant mis $M' = \frac{F'(x)}{324000p}$.

$$\psi = \frac{468000.95}{0,53562266} (\dots\dots 1144490541$$

$$\text{Corr.} = + 0, \dots\dots\dots 7$$

$$0,53562273$$

La Table II du tome III des *Exercices* donne 0,535622732822.

Cette méthode me paraît fournir la manière la plus convenable de construire des Tables pour l'évaluation des Fonctions Elliptiques de première espèce.

Il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante.

Depuis quelque temps j'ai fait encore quelques recherches sur la théorie des Nombres, qui m'ont conduit à des résultats assez curieux relatifs à la belle partie de cette discipline ouverte aux géomètres par votre célèbre loi de Réciprocité. En effet, en partant de la nouvelle théorie de section de cercle proposée par M. Gauss dans la huitième section de ses *Disquisitiones Arithmeticae*, j'ai découvert une méthode qui me conduit aux théorèmes fondamentaux concernant la théorie des Résidus cubiques, biquadratiques, et même des Résidus des puissances plus élevées encore (*).

Pour en donner une idée succincte, je mets ici la démonstration du théorème fondamental relatif aux Résidus quadratiques, fondée sur ces nouveaux principes.

Soit p un nombre, soit x une racine de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$, soit g une racine primitive de la congruence $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, on a

$$x - x^g + x^{g^2} - x^{g^3} + \dots - x^{g^{p-2}} = + \sqrt{\frac{p-1}{2}} \sqrt{-1} \sqrt{p}.$$

(*) Je me sers ici dans ce qui suit des signes et des dénominations mis en usage par M. Gauss dans ses *Disq. Ar.*

On a de même en général

$$x^q - x^{q^2} + x^{q^3} - x^{q^4} + \dots - x^{q^{p-2}}$$

égal à $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ ou à $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, selon que q est résidu quadratique ou non résidu quadratique du nombre p . Mais le nombre q étant aussi premier, on a, en négligeant les multiples de q ,

$$x^q - x^{q^2} + \dots - x^{q^{p-2}} = (x - x^q + \dots - x^{q^{p-2}})^q = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

Donc q sera R ou N.R de p selon que $(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}$, divisé par q , laisse $+1$ ou -1 , ce qui est précisément la loi de Réciprocité, ou, d'après M. Gauss, le théorème fondamental relatif aux Résidus quadratiques.

J'ajoute plusieurs théorèmes relatifs aux Résidus cubiques, qui résultent tous d'un même théorème général. Ce sont les premiers de ce genre qui ont été proposés.

Étant donné un nombre premier p de la forme G_{n+1} , un autre nombre premier quelconque sera résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes

$$L^2 + 27q^2M^2 \quad \text{ou} \quad q^2L^2 + 27M^2.$$

Cependant il faut exclure la forme seconde dans les cas de $q = 2$ et $q = 3$.

Aussi q étant un nombre premier plus grand que 7, il sera résidu cubique de p toutes les fois que p est de la forme $(q + mM)^2 + 27M^2$, le nombre m étant donné par rapport à q au moyen de la Table suivante :

$q =$	11	13	17	19	23	29	31	...
	4	1	3	3	2	5	8	...
			9	9	8	7	3	...
					11	6	9	...
						11	7	...
							12	...
							

Ainsi, par exemple, le nombre 37 est résidu cubique de p toutes les

fois que $4p$ sera de l'une des sept formes :

$$\begin{array}{ll} L^2 + 36963M^2, & 1369L^2 + 27M^2, \\ (37x + 3M)^2 + 27M^2, & (37x + 9M)^2 + 27M^2, \\ (37x + 7M)^2 + 27M^2, & (37x + 12M)^2 + 27M^2, \\ & (37x + 8M)^2 + 27M^2. \end{array}$$

Le nombre $4p$ n'étant pas compris sous l'une des formes établies par les théorèmes précédents, le nombre q n'en saura être résidu cubique.

M. Gauss a présenté à la Société de Göttingue, il y a environ deux ans, un premier Mémoire relatif à la théorie des Résidus biquadratiques, laquelle est beaucoup plus facile que celle des Résidus cubiques. Ce Mémoire n'a pas encore paru, mais il en a donné un extrait dans les *Annales de Göttingue*, année 1825, vol. I. Les théorèmes qui s'y trouvent annoncés se démontrent et pourront même être généralisés par mes méthodes avec une facilité extrême; et, à ce que je crois, ce sera de même avec tout ce qu'on pourrait établir sur les Résidus des puissances. Ledit grand géomètre m'a écrit, depuis, qu'il poursuivra le même objet dans trois autres Mémoires destinés à être présentés à la Société, et il se plaint que le temps lui manque à publier ses vastes recherches sur différents objets de la plus grande importance. Je suis avec le respect le plus profond,

Monsieur,

Votre très-humble serviteur,

D^r C.-G.-J. JACOBI,

Auprès l'Université de Königsberg, en Prusse.

Königsberg, le 12 janvier 1828.

MONSIEUR,

Je chercherais en vain à vous décrire quels furent mes sentiments en recevant votre lettre du 30 novembre et en même temps le numéro du *Globe* qui contient la communication que vous avez bien voulu faire à l'Académie des Sciences de mes essais. Je me sentis confus accablé de

cet excès des bontés que vous m'avez eues et du sentiment que jamais de ma vie je ne saurai mériter de pareilles. Comment vous rendre grâce? Quelle satisfaction pour moi que l'homme que j'admiraient tant en dévorant ses écrits a bien voulu accueillir mes travaux avec une bonté si rare et si précieuse! Tout en manquant de paroles qui soient de dignes interprètes de mes sentiments, je n'y saurai répondre qu'en redoublant mes efforts à pousser plus loin les belles théories dont vous êtes le créateur.

J'avais déjà appris il y a quelques mois que vous avez publié un nouvel ouvrage sur les Fonctions Elliptiques en deux volumes. Aussitôt j'ai donné à un libraire de Berlin l'ordre de me le faire parvenir; mais, à mon grand dépit, je ne l'ai pas encore reçu. J'attends donc avec une impatience extrême le cadeau brillant que vous m'en avez voulu faire et pour lequel je vous rends mille grâces.

Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les Fonctions Elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un Mémoire de M. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées* publié à Berlin par M. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est parvenue pas encore. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement.

Si l'on pose $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}} = \Xi$, l'angle φ étant l'amplitude de Ξ , je

le désigne par $\text{am } \Xi$; K étant la fonction entière $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi}}$, je mets, au lieu de $\text{am}(\Xi - K)$, cette autre expression $\text{coam } \Xi$ (c'est-à-dire *complementi amplitudo*). Je désigne, avec vous,

$$\sqrt{1-x^2 \sin^2(\text{am } \Xi)} = \frac{d \cdot \text{am } \Xi}{d \Xi} \quad \text{par} \quad \Delta \text{am } \Xi.$$

Le module sera mis à côté, si on le juge convenable; toutes les fois

qu'il sera supprimé dans le suivant, les formules se rapportent au module κ . Du reste, je désignerai le complément de κ par κ' et la fonction entière qui répond à κ' par K' .

M. Abel commence par donner l'expression analytique de toutes les racines des équations élevées desquelles dépend la division des Fonctions Elliptiques. En effet, soit $\sin \varphi = i \operatorname{tang} \psi$, i étant $\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{id\psi}{\sqrt{1-\kappa'^2 \sin^2 \psi}},$$

d'où l'on tire

$$\sin \operatorname{am}(i\Xi, \kappa) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\Xi, \kappa'),$$

théorème fondamental de M. Abel.

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\cos \operatorname{am}(i\Xi, \kappa) = \sec \operatorname{am}(\Xi, \kappa'),$$

$$\Delta \operatorname{am}(i\Xi, \kappa) = \frac{\Delta \operatorname{am}(\Xi, \kappa')}{\cos \operatorname{am}(\Xi, \kappa')} = \operatorname{cosec} \operatorname{coam}(\Xi, \kappa').$$

Aussi on aura

$$\sin \operatorname{am}(iK', \kappa) = 0,$$

$$\sin \operatorname{am}(\Xi + iK') = \frac{1}{\kappa \sin \operatorname{am} \Xi},$$

$$\cot \operatorname{am}(\Xi' + iK') = i \Delta \operatorname{am} \Xi,$$

$$\Delta \operatorname{am}(\Xi + iK') = i \cot \operatorname{am} \Xi, \text{ etc.}$$

Comme on a

$$\operatorname{tang} \operatorname{am}(2m'K', \kappa') = 0,$$

m' étant un nombre entier, on aura aussi

$$\sin(2m'iK', \kappa) = 0,$$

d'où suit qu'on aura en général

$$\sin \operatorname{am}(\Xi + 4mK + 4m'iK') = \sin \operatorname{am} \Xi,$$

m et m' étant des nombres positifs ou négatifs. On voit donc que les racines de l'équation élevée qui sert à la division de la Fonction Elliptique Ξ en n parties seront de la forme $\sin \operatorname{am} \frac{\Xi + 4mK + 4m'iK'}{n}$, formule

qui embrasse toutes les racines au nombre de n^2 , si l'on donne à m, m' successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$.

M. Abel ramène ensuite la division d'une Fonction Elliptique quelconque Ξ à la division de la Fonction Entière K . En effet, soient α, β des racines quelconques de l'équation $x^n = 1$, l'expression

$$\left(\sum \alpha^m \beta^{m'} \sin am \frac{\Xi + 4mK + 4m'iK'}{n} \right)^n \quad (*),$$

où l'on donne à m, m' toutes leurs valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$, ne changera pas si l'on met, au lieu de $\sin am \Xi$, une autre racine quelconque $\sin am \frac{\Xi + 4\mu K + 4\mu'iK'}{n}$. Cette expression sera donc symétrique par rapport à ces racines et pourra, par conséquence, être exprimée par

$$\sin am \Xi \quad (**).$$

A présent si l'on donne à α, β toutes leurs valeurs possibles, ce qui donne n^2 combinaisons, on tire de là les valeurs de toutes les racines. M. Abel suit une autre méthode, qui, si je ne me trompe pas, rend le problème plus compliqué qu'il n'est en lui-même.

La division de la fonction entière, laquelle dépend en général d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, est ramenée à une équation du degré $n+1$, n étant un nombre premier. En effet, soit $\frac{4\mu K + 4\mu'iK'}{n} = \omega$, g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(\omega)$ une fonction trigonométrique quelconque de l'amplitude de ω , α une racine de l'équation $x^{n-1} = 1$, on y parvient en considérant l'expression

$$[\varphi(\omega) + \alpha\varphi(g\omega) + \alpha^2\varphi(g^2\omega) + \dots + \alpha^{n-2}\varphi(g^{n-2}\omega)]^{n-1}$$

symétrique en $\varphi(\omega), \varphi(g\omega), \varphi(g^2\omega), \dots, \varphi(g^{n-2}\omega)$. Or les fonctions

(*) On entend par \sum la somme des expressions formées de ladite manière.

(**) Il faut ajouter : Et par des quantités constantes, mais irrationnelles, de la forme $\sin am \frac{4mK + 4m'iK'}{n}$.

symétriques de ces quantités ne sauront avoir que des valeurs différentes au nombre $n+1$, qui répondent à $\mu=0, \mu'=1; \mu=1, \mu'=0; \mu=1, \mu'=1, 2, 3, \dots, n-1$. Donc elles seront données au moyen d'une équation algébrique du degré $n+1$. Je vais ajouter à présent les propres paroles de M. Abel, en remarquant qu'il considère dans son

Mémoire les Fonctions Elliptiques sous la forme $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+e^2x^2)}}$:

« Donc, en dernier lieu, la résolution de l'équation $P_n = 0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $n+1$; mais cette équation ne peut pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque $e=c, e=c\sqrt{3}, e=c(2\pm\sqrt{3})$, etc. Dans le cours de ce Mémoire (*), je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie. En effet, entre autres, je suis parvenu à ce théorème : *On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate, par la règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme 2^n ou 2^n+1 , le dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes.* Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gauss relativement au cercle. »

Connaissant les racines des équations mentionnées, M. Abel les résout en facteurs; ensuite, dans les formules qui en résultent, il pose $n=\infty$, d'où il tire des expressions très-remarquables; mais cela n'a plus aucune difficulté.

Vous m'avez permis, Monsieur, de vous communiquer l'analyse dont je me sers. Une démonstration rigoureuse du théorème général concernant les transformations s'imprime à présent dans le Journal de M. Schumacher; elle vous sera envoyée aussitôt qu'elle sera imprimée. Mes recherches ultérieures sont encore loin d'être finies; cependant j'en embrasserai une partie dans un Mémoire que je crois pouvoir publier dans peu. Il s'y trouvera, entre autres, un résultat curieux qui d'abord m'a frappé un peu; c'est le cas suivant. Si l'on peut trans-

(*) Qui n'est pas encore publié.

former un module x dans un autre λ , on a entre ces deux modules une équation algébrique du degré $n + 1$, si la transformation se rapporte au nombre n , qu'on suppose être premier. Ces équations symétriques en x et λ sont, par exemple pour $n = 3$, $n = 5$:

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1 - u^2v^2) = 0, \quad u^5 - v^5 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) \pm 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

où l'on a supposé $u = \sqrt[4]{x}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Il paraît remarquable que ces équations, qu'on pourrait appeler *équations modulaires*, ont leur forme la plus simple entre les quatrièmes racines des modules. Or toutes ces équations algébriques en nombre infini satisfont à une même équation différentielle du troisième degré, savoir :

$$3(dx^2 d\lambda^2 - d\lambda^2 dx^2) - 2dx d\lambda(dx d^2\lambda - d\lambda d^2x) \\ + dx^2 d\lambda^2 \left[\left(\frac{1+x^2}{x-x^3} \right)^2 dx^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3} \right)^2 d\lambda^2 \right] = 0,$$

où l'on n'a supposé constant aucun différentiel. Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module, de sorte que la transformation devient multiplication; ainsi x étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura deux racines de l'équation $u^2 - v^2 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - 4u^2v^2) = 0$ égales à $(1 \pm i)u^2$, d'où l'on tire $v^2 = \lambda^2 = x^2 = \frac{1}{2}$. Ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, x étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la Fonction Elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$. On remarque des choses semblables dans les modules qui sont liés d'après une échelle quelconque avec $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. Je suis très-curieux de savoir votre avis sur ma démonstration, laquelle à la vérité est un peu compliquée. La nouvelle d'une troisième édition de la *Théorie des Nombres* m'a charmé. Je n'ai travaillé sur cette science que très-peu de temps; quand je m'aurai pris la liberté de vous communiquer un petit Mémoire qui va être publié sur la théorie des Résidus, vous verrez que mes idées ne méritent pas la place brillante que

vous leur avez offerte. Aussi les recherches sur les Fonctions Elliptiques doivent être en quelque sorte finies avant qu'elles soient dignes de former un supplément à un ouvrage sans doute parfait dans toutes ses parties.

Adieu, Monsieur, daignez recevoir les respects les plus profonds que m'inspirent la supériorité de vos lumières et la générosité de vos sentiments. Jamais de ma vie je n'oublierai cette bonté de père avec laquelle vous avez voulu m'encourager dans la carrière des sciences.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

P. S. Le troisième cahier du *Journal de Crelle*, que je viens de recevoir, ne contient pas encore la suite du Mémoire de M. Abel.

MONSIEUR,

Il me faut vous faire de grandes excuses d'avoir retardé aussi longtemps la réponse à votre aimable lettre, pleine de vos bontés, qui font la plus douce récompense de mes efforts et un grand bonheur de ma vie. En effet, j'avais espéré de jour en jour pouvoir vous mander la fin d'un premier Mémoire qui devait embrasser la plupart de mes recherches. Cependant la difficulté de la matière, de même que les nouvelles vues qui se sont ouvertes dans le cours même du travail, me font éprouver de si grands retards, que peut-être il ne vous sera pas désagréable si je vous fais part des résultats principaux trouvés jusqu'ici, et qui me paraissent dignes de votre intérêt. Veuillez les accueillir avec la bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes et qui seront gravées à jamais dans mon cœur.

Soit d'après ma notation $\omega = \frac{mK + 2m'iK'}{n}$ (n est un nombre impair), m et m' désignant des nombres entiers quelconques, mais tels qu'un même nombre ne saura être diviseur des trois, m , m' , n . Vous verrez aisément que la démonstration de mon théorème s'applique mot

à mot au cas même qu'on met partout $\text{am } \omega$ au lieu de $\text{am } \frac{K}{n}$. En mettant successivement

$$\omega = \frac{K}{n}, \quad \frac{2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 2iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 4iK'}{n}, \dots, \quad \frac{K \pm (n-1)iK'}{n},$$

on tire de là un nombre $n+1$ de transformations attachées au nombre n et analogues à celle que j'ai donnée relativement à $\omega = \frac{K}{n}$. Elles embrassent toutes les possibles quand n est premier; aussi dans les cas de $n=3$, $n=5$, j'ai montré que les équations modulaires montent au quatrième et sixième degré, comme cela doit être. De ces modules, au nombre de $n+1$, il n'y a que deux qui soient réels, savoir : ceux qui répondent à $\omega = \frac{K}{n}$ et à $\omega = \frac{2iK'}{n}$. La dernière transformation, savoir : celle qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, est précisément la même qui fournit le théorème complémentaire. Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel. J'en cite les trois suivantes, présentées d'après la forme sous laquelle vous considérez les Fonctions Elliptiques, et dans laquelle j'ai eu soin de vous suivre :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \text{sinam}(n\xi, x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \prod \text{sinam} \left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n} \right), \\ (2) \quad \frac{1}{K^{n-1}} = \prod \text{sin}^2 \text{coam} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}, \\ (3) \quad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \prod \frac{\text{sin}^2 \text{coam} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}{\text{sin}^2 \text{am} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}. \end{array} \right.$$

Les produits désignés par \prod embrassent tous les facteurs *différents entre eux* que l'on obtient en donnant à m, m' des valeurs en nombres entiers positifs ou négatifs.

Les trois formules principales relatives à la transformation complé-

• mentaire sont :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \sin am(n\xi, \kappa) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda^n}{\kappa}} \sin am \frac{\xi}{M} \sin am \left(\frac{\xi}{M} + \frac{4i\Lambda'}{n} \right) \sin am \left(\frac{\xi}{M} + \frac{8i\Lambda'}{n} \right) \dots \sin am \left(\frac{\xi}{M} + \frac{4(n-1)i\Lambda'}{n} \right) \pmod{\lambda} \\ &= \frac{nM \gamma \left(1 + \frac{\gamma^2}{\tan^2 am \frac{2\Lambda'}{n}} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{\tan^2 am \frac{4\Lambda'}{n}} \right) \dots \left[1 + \frac{\gamma^2}{\tan^2 am \frac{(n-1)\Lambda'}{n}} \right]}{\left(1 + \lambda^2 \tan^2 am \frac{2\Lambda'}{n} \gamma^2 \right) \left(1 + \lambda^2 \tan^2 am \frac{4\Lambda'}{n} \gamma^2 \right) \dots \left[1 + \lambda^2 \tan^2 am \frac{(n-1)\Lambda'}{n} \gamma^2 \right]} \pmod{\lambda'}, \end{aligned} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \kappa' = \lambda'^n \left[\sin co am \frac{2i\Lambda'}{n} \sin co am \frac{4i\Lambda'}{n} \sin co am \frac{6i\Lambda'}{n} \dots \sin co am \frac{(n-1)i\Lambda'}{n} \right] \pmod{\lambda} \\ &= \frac{\gamma^n}{\left[\Delta am \frac{2\Lambda'}{n} \Delta am \frac{4\Lambda'}{n} \dots \Delta am \frac{(n-1)\Lambda'}{n} \right]} \pmod{\lambda'}, \end{aligned} \right. \\
 (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{nM} = \left[\frac{\sin co am \frac{2\Lambda'}{n} \sin co am \frac{4\Lambda'}{n} \dots \sin co am \frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\sin am \frac{2\Lambda'}{n} \sin am \frac{4\Lambda'}{n} \dots \sin am \frac{(n-1)\Lambda'}{n}} \right] \pmod{\lambda'}, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où l'on a mis

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \sin am \left(\frac{\xi}{M}, \lambda \right), \quad \Lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}, \\
 \Lambda' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \lambda^2 + \lambda'^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Il faut ajouter que la théorie de la première transformation donne

$$\Lambda = \frac{K}{nM}, \quad \Lambda' = \frac{K'}{M}. \text{ Démontrons la première de ces formules.}$$

Si, dans la formule suivante, qui concerne la première transformation :

$$\begin{aligned}
 & \sin am \left(\frac{\xi}{M}, \lambda \right) \\
 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\kappa^n}{\lambda}} \sin am \xi \sin am \left(\xi + \frac{4K}{n} \right) \sin am \left(\xi + \frac{8K}{n} \right) \dots \sin am \left(\xi + \frac{4(n-1)K}{n} \right),
 \end{aligned}$$

on met $\xi + \frac{2m'iK'}{n}$ au lieu de ξ , $\frac{\xi}{M}$ devenant $\frac{\xi}{M} + \frac{2m'iK'}{nM} = \frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}$,
on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{x^n}{\lambda}} \prod \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

où l'on donne à m les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \frac{n-1}{n}$. Dans cette formule, mettant successivement $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-1}{n}$, et formant le produit, on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{x^n}{\lambda^n}} \prod \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right).$$

Mais la formule désignée par φ (1) donne

$$\operatorname{sinam} n\xi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \prod \operatorname{sinam}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{sinam}(n\xi, x) = \sqrt{\frac{\lambda^n}{x}} \prod \operatorname{sinam}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right),$$

ce qui est la formule à démontrer. De la même manière on démontre les deux autres au moyen des formules φ (1), (2). La formule dont j'ai fait mention dans ma première lettre résulte des mêmes principes.

Si l'on met dans ces deux transformations $i\xi$ au lieu de ξ , on a la transformation du module x' dans le module λ' , et *vice versa*. Notamment λ_1 le second module réel dans lequel on sait transformer le module x et qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, on verra que λ dépend de la même manière de x que x de λ_1 , λ'_1 de x' et x' de λ' , λ'_1 étant le complément de λ_1 . Donc si l'on forme d'après la même loi deux échelles relatives à x et x' , trois termes consécutifs seront dans l'une... $\lambda, x, \lambda, \dots$ et dans l'autre... $\lambda'_1, x', \lambda'_1, \dots$, théorème que vous avez démontré dans les cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

On pourrait d'une manière analogue passer à la multiplication par

le moyen du module λ , de même que par le moyen des autres modules imaginaires.

Faisons $\xi = \frac{u}{n}$, $n = \infty$, on aura dans cette limite $\lambda = 0$, et par conséquent $\Lambda = \frac{\pi}{2}$; les formules $\Lambda = \frac{K}{nM}$, $\Lambda' = \frac{K'}{M}$ donnent $nM = \frac{2K}{\pi}$, $\frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{nM} = \frac{\pi K'}{2K}$; on aura de plus

$$y = \sin \operatorname{am} \left(\frac{\xi}{M}, \lambda \right) = \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{nM}, \lambda \right) = \sin \frac{\pi u}{nK}.$$

La formule (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$\sin \operatorname{am}(n\xi, \lambda)$

$$= \frac{nMy \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2i\Lambda'}{n}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{4i\Lambda'}{n}} \right) \cdots \left[1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-1)\Lambda'}{n}} \right]}{\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{i\Lambda'}{n}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{3i\Lambda'}{n}} \right) \cdots \left[1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{(n-2)i\Lambda'}{n}} \right]} \quad (\text{mod. } \lambda).$$

De là on tire, dans le cas de $n = \infty$,

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{\frac{nKy}{\pi} \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{i\pi K'}{K}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2i\pi K'}{K}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{3i\pi K'}{K}} \right) \cdots}{\left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{i\pi K}{2K}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{3i\pi K}{2K}} \right) \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{5i\pi K}{2K}} \right) \cdots},$$

y étant $\sin \frac{\pi u}{2K}$. Soit $e^{\frac{i\pi u}{2K}} = U$, $e = q$; cette formule se transforme dans celle-ci

$\sin \operatorname{am}(u, \lambda)$

$$= \frac{2K}{\pi} A \left(\frac{U - U^{-1}}{2} \right) \frac{[(1 - q^2 U^2)(1 - q^4 U^2)(1 - q^6 U^2) \cdots] [(1 - q^2 U^{-2})(1 - q^4 U^{-2})(1 - q^6 U^{-2}) \cdots]}{[(1 - q U^2)(1 - q^3 U^2)(1 - q^5 U^2) \cdots] [(1 - q U^{-2})(1 - q^3 U^{-2})(1 - q^5 U^{-2}) \cdots]},$$

où l'on a mis $A = \left[\frac{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \cdots} \right]^2$. Si l'on met dans cette formule $u + iK'$ au lieu de u , U deviendra $\sqrt{q}U$; de là on tire, en re-

marquant que $\sin am(u + iK') = \frac{1}{x \sin am u}$, la valeur de $A = \frac{\pi \sqrt[4]{q}}{\sqrt{x} K}$. De la même manière on trouve au moyen des expressions semblables pour $\cos am u$, $\Delta am u$, etc., les valeurs des produits suivants :

$$\begin{aligned} [(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^6 &= \frac{2x'\sqrt[4]{q}}{\sqrt{x}}, \\ [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots]^6 &= \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{xx'}}, \\ [(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots]^6 &= \frac{2xx'K^3}{\sqrt{q}\pi^3}, \\ [(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots]^6 &= \frac{K}{4\sqrt{x'}\sqrt{q}}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

sommations très-remarquables, ce me semble.

Comme on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K}$, $\frac{\Lambda'_1}{\Lambda_1} = \frac{1}{n} \frac{K'}{K}$, on voit qu'en mettant seulement q^n ou $q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de q , on tire de ces formules aussitôt les expressions semblables relatives aux modules transformés λ , λ_1 . Ainsi on aura, par exemple,

$$x = 4\sqrt{q} \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots} \right]^4, \quad \lambda = 4\sqrt{q^n} \left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\dots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\dots} \right]^4.$$

On ne saura guère reconnaître de la nature de ces produits que ces deux expressions dépendent *algébriquement* l'une de l'autre. Je remarque encore que, comme on a

$$x' = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots} \right]^4, \quad x' + x'^3 = 1,$$

on aura aussi

$$\begin{aligned} &[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^6 + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots]^4 \\ &= [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots]^6, \end{aligned}$$

équation difficile à prouver au moyen des méthodes connues. On y saura ajouter nombre d'autres.

Si l'on met $u + \frac{4mK}{n}$ au lieu de u , U change en αU , où $\alpha^n = 1$.

De là se déduit de la formule pour $\text{sinam } u$ une nouvelle vérification assez facile de ma première transformation. Je passe à d'autres recherches.

Soit

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U - U^{-1}}{2} \right) [(1 - q^2 U^2)(1 - q^4 U^2)(1 - q^6 U^2) \dots] \\ & \quad \times [(1 - q^2 U^{-2})(1 - q^4 U^{-2})(1 - q^6 U^{-2}) \dots] \\ & = \alpha'(U - U^{-1}) + \alpha''(U^3 - U^{-3}) + \alpha'''(U^5 - U^{-5}) + \dots \end{aligned}$$

Si l'on met dans ce produit qU au lieu de U , il sera multiplié par $\left(\frac{qU - q^{-1}U^{-1}}{U - U^{-1}} \right) \left(\frac{1 - U^2}{1 - q^2 U^2} \right) = \frac{1}{qU^2}$. De là suit :

$$\alpha'' = -q^2 \alpha', \quad \alpha''' = -q^4 \alpha'', \quad \alpha^{iv} = q^6 \alpha''', \dots,$$

ou

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} = -q^2, \quad \frac{\alpha'''}{\alpha''} = -q^2, \quad \frac{\alpha^{iv}}{\alpha'''} = -q^2, \quad \frac{\alpha^v}{\alpha^{iv}} = -q^2, \dots;$$

de sorte qu'on aura ce produit égal à

$$\alpha' [U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^4(U^5 - U^{-5}) - q^6(U^7 - U^{-7}) + q^8(U^9 - U^{-9}) - \dots].$$

De la même manière on trouve

$$\begin{aligned} & [(1 - qU^2)(1 - q^3 U^2)(1 - q^5 U^2) \dots] [(1 - qU^{-2})(1 - q^3 U^{-2})(1 - q^5 U^{-2}) \dots] \\ & = b[1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^3(U^4 + U^{-4}) - q^5(U^6 + U^{-6}) + q^7(U^8 + U^{-8}) - \dots], \end{aligned}$$

α' et b désignant des constantes.

On aura donc

$$\text{sinam}(u) = C \frac{U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^4(U^5 - U^{-5}) - q^6(U^7 - U^{-7}) + \dots}{1 - q(U^2 + U^{-2}) + q^3(U^4 + U^{-4}) - q^5(U^6 + U^{-6}) + q^7(U^8 + U^{-8}) - \dots}.$$

La constante C se détermine encore au moyen de la formule

$$\text{sinam}(u + iK') = \frac{1}{\text{sinam } u},$$

en remarquant que U change en $\sqrt{q}U$ en même temps que u devient

$u + iK'$. On la trouve égale à $\frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{x}}$, de sorte qu'il vient, en mettant $u = \frac{2Kx}{\pi}$.

$$(1) \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{q^{\frac{1}{4}} \sin x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - q^{\frac{49}{4}} \sin 7x + \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots}.$$

J'y ajoute les trois semblables :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\ &= 2\sqrt{\frac{x'}{x}} \frac{q^{\frac{1}{4}} \cos x + q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + q^{\frac{49}{4}} \cos 7x + \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots}, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{x'} \frac{1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x + \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots},$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\ &= \frac{\sin \frac{x}{2} + q \sin \frac{3x}{2} - q^3 \sin \frac{5x}{2} - q^5 \sin \frac{7x}{2} + q^{16} \sin \frac{9x}{2} + q^{17} \sin \frac{11x}{2} - \dots}{\cos \frac{x}{2} - q \cos \frac{3x}{2} - q^3 \cos \frac{5x}{2} + q^5 \cos \frac{7x}{2} + q^{16} \cos \frac{9x}{2} - q^{17} \cos \frac{11x}{2} - \dots}, \end{aligned} \right.$$

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2K}{\pi}} &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots, \\ \sqrt{x} &= \frac{2(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \dots)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots}, \\ \sqrt{x'} &= \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dont la première est la plus remarquable.

Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur; les nu-

mérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question. Je finirai ici l'exposition rapide des résultats principaux trouvés jusqu'ici.

Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant :

La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $T = \frac{V dU}{dx} - \frac{U dV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à M. Schumacher, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^3}$, $y = \frac{a'x + b'x^3}{1 + c'x^3}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir,

et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à M. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin \operatorname{am} (i\xi, x) = i \operatorname{tangam} (\xi, x')$, j'en tirai la transformation de x' en λ' . J'avais donc deux transformations différentes, l'une de x dans un module plus petit λ , l'autre de x' dans un module plus grand λ' . De là, je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux x' et λ , x et λ' , on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la

hardiesse de vous adresser une première lettre (*), qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci-après.

Le 14 février dernier, j'ai enfin reçu votre excellent cadeau par la bonté de M. de Humboldt, qui me l'a fait parvenir aussitôt qu'il arriva à Berlin. Il fera l'étude de ma vie.

M. Schumacher m'a donné connaissance de ce que vous lui avez écrit du théorème complémentaire; je me suis donc empressé de faire partir cette lettre, et je l'en avertirai. Il faut m'excuser, Monsieur, si la bonne opinion que vous avez bien voulu avoir pour moi me rend un peu timide à présenter des choses trop imparfaites à un si grand maître.

M. Crelle m'a écrit que la continuation du Mémoire de M. Abel s'imprime déjà. Je l'attends avec impatience. Quant à M. Gauss, il n'a rien encore publié sur les Fonctions Elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la philologie à Berlin, où il n'y a pas des géomètres de distinction.

Daignez accueillir l'assurance de mon respect le plus profond.

Votre dévoué

C.-S.-J. JACOBI.

Königsberg, 12 avril 1828.

Königsberg, 9 septembre 1828.

MONSIEUR,

La lettre dans laquelle vous m'aviez mandé votre maladie de l'hyver passé m'a causé de grandes peines, et j'ai attendu avec la plus vive inquiétude la nouvelle de l'amélioration de votre santé qui m'est enfin parvenue. L'avis que vous avez voulu me donner en même temps de

(*) Je l'avais donnée à un jeune marchand que je ne connaissais pas personnellement; on m'avait dit qu'il allait droitement à Paris; mais il a passé plusieurs mois dans les capitales de l'Allemagne. De là s'est fait, à mon grand dépit, le retard de cette lettre.

vos départ pour le midi de la France a causé le retard de ma réponse. Fasse le ciel que ce voyage vous ait entièrement satisfait !

Ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci. En effet, l'équation $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K}$ montre que x dépend de la même manière de λ que λ' de x' ; d'où il suit qu'en appliquant au module λ la même transformation qui sert à parvenir du module x' au module λ' , il faut retomber sur le module x .

Vous aurez reçu sans doute deux Mémoires de M. Abel, l'un inséré dans le *Journal de M. Crelle*, l'autre dans les *Nouvelles Astronomiques* de M. Schumacher. Vous y aurez vu que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la Transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second Mémoire, inséré dans le Recueil de M. Schumacher, n° 138, contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.

Dans le même cahier du *Journal de M. Crelle* (3 vol., 2 cah.) où se trouvent les premiers travaux de M. Abel sur la transformation, j'avais fait insérer la remarque que toutes les transformations attachées au nombre n sont au nombre $n + 1$, lorsque n est premier, et que l'on trouvait tous les modules transformés qui s'y rapportent en mettant, dans la formule $\sqrt{x} = \frac{2\sqrt[n]{q} + 2\sqrt[n]{q^2} + \sqrt[n]{q^n} + \dots}{1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + \dots}$, q^n et $\sqrt[n]{q}$ au lieu de q , $\sqrt[n]{q}$ ayant n valeurs différentes. M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées. Que n soit premier ou non, le nombre des transformations sera en général égal à la somme des facteurs de n ; on trouve tous les modules transformés en mettant $\sqrt[n]{q^{a'}}$ au lieu de q , $aa' \equiv n$. Cette théorie est complète de sorte qu'on ne saura y ajouter. Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'Analyse. Je remarque encore que, n étant un nombre carré, on aura une seule fois $a = a'$; donc un seul

des modules transformés sera dans ce cas égal à celui d'où l'on est parti, ce qui fournit la multiplication.

Vous ne m'avez dit dans deux de vos lettres pas un seul mot sur ces séries remarquables sommées par les Fonctions Elliptiques, dans lesquelles les exposants suivent la loi des nombres carrés, et dont celle-ci :

$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots$ me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie. Tout ce qui regarde la décomposition des nombres en nombres carrés devient, par ces séries, du ressort des Fonctions Elliptiques. Les développements de celles-ci me donnent, par exemple :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1-q^4} + \dots \\ &= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^2)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \dots \\ &= 1 + 8 \sum \varphi(p) (q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{6p} + 3q^{8p} + 3q^{10p} + \dots), \end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque, et $\varphi(p)$ la somme des facteurs de p . Comme dans cette série il ne manque aucune puissance de q et qu'on a en même temps

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^{16} + \dots)^2,$$

il suit comme corollaire de cette formule le fameux théorème de Fermat, que chaque nombre est la somme de quatre carrés. Les théorèmes relatifs aux nombres qui sont la somme de deux carrés découlent de la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2K}{\pi} &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots)^2 = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^2}{1-q^2} + \frac{4q^4}{1-q^4} - \frac{4q^7}{1-q^7} + \dots \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^2}{1+q^2} - \frac{4q^4}{1+q^4} + \frac{4q^{16}}{1-q^4} + \frac{4q^{25}}{1-q^5} - \frac{4q^{21}}{1+q^6} - \dots \end{aligned}$$

Parmi d'autres formules, je trouve encore la suivante, digne de vous être communiquée :

$$\begin{aligned} &(q - q^{3 \cdot 3} - q^{7 \cdot 7} + q^{11 \cdot 11} + q^{13 \cdot 13} - q^{17 \cdot 17} - q^{19 \cdot 19} + q^{23 \cdot 23} + \dots)^2 \\ &= q^3 - 3q^{3 \cdot 3 \cdot 3} + 5q^{3 \cdot 3 \cdot 5} - 7q^{3 \cdot 7 \cdot 7} + 9q^{3 \cdot 9 \cdot 9} - 11q^{3 \cdot 11 \cdot 11} + \dots, \end{aligned}$$

dont vous saisirez aisément la loi. Elle résulte de la transformation attachée au nombre 3.

Ne vous fait-il pas de plaisir, Monsieur, de voir se rapprocher l'une à l'autre deux théories si hétérogènes en apparence et qui se datent en quelque sorte de vos travaux?

Je vais ajouter quelques remarques isolées telles qu'elles se présentent à mon esprit. Rappelons la formule donnée dans ma dernière lettre :

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q} \sin x - 2\sqrt[4]{q^3} \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^5} \sin 5x - 2\sqrt[4]{q^7} \sin 7x + \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots}.$$

Il m'a paru d'importance de pouvoir exprimer à part le numérateur et le dénominateur de cette expression au moyen des Fonctions Elliptiques, ce qui n'est pas facile.

En me servant de vos signes et mettant F' au lieu de K , $\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, et par conséquent $\frac{2Kx}{\pi} = F$, je trouve

$$\begin{aligned} & 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots \\ &= \sqrt{\frac{2K'F'}{\pi}} e^{\int \frac{F'E - E'F}{F'\Delta(\varphi)}}, \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise depuis 0 jusqu'à φ .

L'un de vos plus beaux théorèmes est que l'expression

$$\int \frac{x^2 \sin A \cos A \Delta(A) \sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2 A \sin^2 \varphi) \Delta(\varphi)} - \frac{F(\varphi)}{F'} [F'E(A) - E'F(A)]$$

ne change pas de valeur si l'on échange entre eux les angles φ et A .

Or étant mis $A = \operatorname{am} \frac{2K\alpha}{\pi}$, $\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, je la trouve égale à

$$\frac{1}{2} \log \left[\frac{1 - 2q \cos 2(x - \alpha) + 2q^4 \cos 4(x - \alpha) - 2q^9 \cos 6(x - \alpha) + 2q^{16} \cos 8(x - \alpha) - \dots}{1 - 2q \cos 2(x + \alpha) + 2q^4 \cos 4(x + \alpha) - 2q^9 \cos 6(x + \alpha) + 2q^{16} \cos 8(x + \alpha) - \dots} \right],$$

formule symétrique en x et α . D'ailleurs elle montre que les Fonctions Elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendentes qui n'en ont que deux, découverte qui vous intéressera beaucoup.

Mes recherches seront rassemblées dans un petit Ouvrage d'environ 200 pages in-4 qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre : *Fundamenta nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*. Peut-être je serai assez heureux de vous le présenter moi-même.

Il faut avouer, Monsieur, que je suis un peu fatigué de la matière, qui m'a occupé pendant dix-huit mois presque jour et nuit. Cependant la fin de mon Ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches; il en reste encore d'une grande importance, mais aussi d'une grande difficulté, Je vous prie instamment de me donner des nouvelles de vous et surtout de votre santé. Vous pourriez compter sur une prompte réponse.

Votre très-humble et très-dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

M. Bessel vous rend grâce de vos civilités; je vous prie d'en faire de ma part à M. Cauchy, dont j'ai toujours estimé de préférence les écrits ingénieux et d'une rare subtilité. Les formules analytiques qui renferment le théorème de Fermat ne seront pas sans intérêt pour ce Géomètre, qui a tant de mérite dans cette partie de la théorie des Nombres.

Königsberg, le 18 janvier 1829.

MONSIEUR,

Il faut que vous soyez assez fâché de moi à cause du grand retard de ma réponse à votre dernière lettre, et je ne saurai à peine m'excuser si ce n'est que j'ai voulu finir, avant de vous répondre, plusieurs travaux très-difficiles sur les Fonctions Elliptiques, pour pouvoir vous en mander les résultats. Je ne veux vous parler à présent que du Problème le plus important de ceux que je suis parvenu à résoudre dans ces derniers temps : c'est la résolution algébrique et générale de l'équation du degré n^2 , de laquelle dépend la division de la Fonction Elliptique en n parties égales. Je vous prie, Monsieur, de me permettre d'entrer là-dessus dans un grand détail.

Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des Fonctions Elliptiques, nous remarquâmes en même temps, M. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2 , de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la Fonction Elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier *Mémoire* de M. Abel *sur les Fonctions Elliptiques*, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route, sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il compose son *Mémoire*, que c'était le *medium* des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin am(nu)$, $x = \sin am(u)$, n étant un nombre impair quelconque, si l'on a

$$(1) \quad z = \frac{b'y + b''y^3 + \dots + b^{(n)}y^n}{b + b''y^2 + \dots + b^{(n-1)}y^{n-1}},$$

$$(2) \quad y = \frac{a'x + a''x^3 + \dots + a^{(n)}x^n}{a + a''x^2 + \dots + a^{(n-1)}x^{n-1}},$$

y étant le *sinus amplitude* de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z , exprimer en premier lieu x en y , en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n , on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'une. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section dans une petite *Addition* faite au premier *Mémoire* de M. Abel *sur les Fonctions Elliptiques*, et laquelle se trouve dans le 3^e vol. du *Journal de M. Crelle*. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et dont je veux vous parler en peu de mots.

Partons des deux formules connues pour la transformation des Fonc-

tions Elliptiques, qui donnent ensemble la multiplication :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda}{\pi M} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) \\ & = \sin \operatorname{am} (u) + \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4K}{n} \right) + \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{8K}{n} \right) + \dots \\ & \quad + \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4(n-1)K}{n} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{n\pi M}{\lambda} \sin \operatorname{am} (nu) \\ & = \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M} + \frac{4iK'}{nM}, \lambda \right) + \dots \\ & \quad + \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M} + \frac{4(n-1)iK'}{nM}, \lambda \right), \end{aligned} \right.$$

i étant $\sqrt{-1}$. Au moyen de l'équation (1) on tire de la formule (2) celle qui suit :

$$(3) \quad n \sin \operatorname{am} (nu) = \sum \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{mK + m'iK'}{n} \right),$$

en donnant à m, m' les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$. Cette dernière formule a été déjà donnée par M. Abel.

Dans le cas de n premier, le seul que nous considérerons pour plus de simplicité, on a $n+1$ formules analogues à la formule (1) et qui répondent aux diverses transformations du module K attachées au nombre n . Elles sont contenues toutes sous la formule générale :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda}{\pi M} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) \\ & = \sin \operatorname{am} (u) + \sin \operatorname{am} (u + 4\omega) + \sin \operatorname{am} (u + 8\omega) + \dots \\ & \quad + \sin \operatorname{am} [u + 4(n-1)\omega], \end{aligned} \right.$$

ω ayant une des $n+1$ valeurs suivantes :

$$\frac{K}{n}, \frac{iK'}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{2K}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{4K}{n}, \dots, \frac{iK'}{n} + \frac{2(n-1)K}{n},$$

et les quantités λ, M étant déterminées de la même manière, par ω , qu'elles sont déterminées par $\frac{K}{n}$ dans la formule (1). Nommons les valeurs de λ, M qui répondent à ces différentes valeurs de ω :

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n; \quad M, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n,$$

si l'on ajoute ensemble les $n + 1$ quantités suivantes :

$$\frac{\lambda}{xM} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right), \quad \frac{\lambda_1}{xM_1} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1 \right), \quad \frac{\lambda_2}{xM_2} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2 \right), \dots, \\ \frac{\lambda_n}{xM_n} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n \right),$$

en substituant pour chacune sa valeur tirée de l'équation générale (4), on trouve :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda}{xM} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + \frac{\lambda_1}{xM_1} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1 \right) + \dots + \frac{\lambda_n}{xM_n} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n \right) \\ & = n \sin \operatorname{am}(u) + \sum \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n} \right) \\ & = n \sin \operatorname{am}(u) + n \sin \operatorname{am}(nu). \end{aligned} \right.$$

En effet, on voit aisément qu'il se trouve dans la somme dont on parle tous les termes de l'expression $\sum \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n} \right)$ et qu'ils ne s'y trouvent qu'une seule fois, excepté seulement le terme $\sin \operatorname{am}(u)$, qui s'y trouve $n + 1$ fois. De l'équation (5) on tire celle qui suit :

$$(6) \quad \sin \operatorname{am}(u) = \frac{\frac{\lambda}{xM} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + \frac{\lambda_1}{xM_1} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1 \right) + \dots + \frac{\lambda_n}{xM_n} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n \right) - n \sin \operatorname{am}(nu)}{n}.$$

C'est la formule remarquable dont j'ai parlé, et qui est de la plus grande importance dans la théorie de la division des Fonctions Elliptiques. En effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer $\sin \operatorname{am}(u)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$, on n'a plus qu'à exprimer par $\sin \operatorname{am}(nu)$ les quantités $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p \right)$, ce qui se fait par la résolution d'équations algébriques du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Je vais rapporter à présent les expressions algébriques et générales des racines de ces dernières.

Soit toujours $\sin \operatorname{am}(nu) = z$ et désignons par $\Phi(nu, \omega)$ l'expression suivante :

$$\Phi(nu, \omega) \\ = (1 - z^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega . z^2)(1 - z^2 \sin^2 \operatorname{am} 8\omega . z^2) \dots [1 - z^2 \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega . z^2];$$

nommons de plus $A^{(p)}$ l'expression suivante :

$$A^{(p)} = \frac{\Phi(4p\omega, \omega) \Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)},$$

je dis qu'on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\lambda}{xM} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) \\ &= \sin \operatorname{am}(nu) + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega) \sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega) \sqrt[n]{A''} + \dots \\ & \quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega] \sqrt[n]{A^{(n-1)}}. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $A^{(p)}$ seront de la forme $P + Q \sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z .

Voici une formule entièrement nouvelle pour la transformation des Fonctions Elliptiques, et laquelle ne pourra être *déduite* d'aucune façon des formules connues jusqu'ici, quoiqu'une fois trouvée, on peut la *vérifier* par les premiers éléments de la théorie des Fonctions Elliptiques, et même sans supposer connues les formules de transformation ordinaires. La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu'ici.

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt les formules algébriques et générales pour exprimer $\sin \operatorname{am}(u)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$. Nommons pour cet effet $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les différentes valeurs de ω qui répondent aux différents modules transformés $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, et soit $A_m^{(p)}$ une expression qui dépend de la manière de ω_m que $A^{(p)}$ dépend de ω , on trouve

$$\begin{aligned} n \sin \operatorname{am}(u) &= \sin \operatorname{am}(nu) \\ &+ \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega) \sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega) \sqrt[n]{A''} + \dots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega] \sqrt[n]{A^{(n-1)}} \\ &+ \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_1) \sqrt[n]{A'_1} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_1) \sqrt[n]{A''_1} + \dots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_1] \sqrt[n]{A^{(n-1)}_1} \\ &+ \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_2) \sqrt[n]{A'_2} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_2) \sqrt[n]{A''_2} + \dots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_2] \sqrt[n]{A^{(n-1)}_2} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega_n) \sqrt[n]{A'_n} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega_n) \sqrt[n]{A''_n} + \dots + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega_n] \sqrt[n]{A^{(n-1)}_n}. \end{aligned}$$

C'est l'expression algébrique pour la $n^{\text{ième}}$ section des Fonctions Elliptiques, laquelle est composée, comme on voit, de $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$

$n^{\text{èmes}}$ racines; les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont toutes de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z . Vous trouverez ce résultat parmi d'autres dans le *Journal de M. Crelle*; du nombre de ces derniers sont *les formules générales pour la transformation des Fonctions Elliptiques de la seconde et de la troisième espèce*. Les limites d'une lettre ne me permettent pas d'entrer dans ce moment dans un plus grand détail. Je vous entretiendrai une autre fois de la manière dont je suis parvenu à la formule (7), laquelle pourra paraître assez étrangère, comme elle est fondée sur la considération des séries et surtout sur les propriétés remarquables de mes nouveaux transcendents H , Θ , au milieu desquels on peut exprimer rationnellement tous les radicaux. Ainsi, par exemple, ω étant $= \frac{K}{n}$, on a

$$\sqrt[n]{\frac{A(P)}{A(Q)}} = \frac{\Theta(o)\Theta\left(nu + \frac{4pK}{n}\right)}{\Theta\left(\frac{4pK}{n}\right)\Theta(nu)}, \quad \Theta(u) \text{ étant } \sqrt{\frac{2K'}{\pi}} e^{\int_0^u d\varphi \frac{F'E - E'F}{F\Delta}}, \quad \varphi = am(u).$$

Cependant, comme je l'ai dit, on peut aussi vérifier la formule (7) en quantités finies.

A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon Ouvrage en deux Parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ : je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première Partie, j'exposerai ce qui est particulier à M. Abel, en rapprochant les méthodes de cet Auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.

Il faut vous rendre encore mille grâces pour l'envoi de votre premier Supplément; tout ce qu'il contient vous appartient sous tant de titres que ce n'est que votre bonté qui m'y a fait prendre tant de part. C'est encore à vous, Monsieur, que je suis redevable de la place de Professeur dont vous êtes assez obligeant de me féliciter. Une gazette de Berlin ayant fait mention de la communication que vous avez faite à votre Académie de mes travaux, l'autorité de votre nom a été la cause que le Ministre m'a placé.

Vous m'avez donné de grandes inquiétudes sur votre santé dans votre dernière lettre; il faut que vous m'en arrachiez sitôt qu'il vous soit possible : je vous en prie instamment.

Ce serait trop me punir pour le retard de ma réponse par un retard de votre côté; c'est la division des Fonctions Elliptiques qu'il faut accuser là-dessus.

Votre entièrement dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Je vous prie, Monsieur, de faire parvenir la lettre ci-adjointe au célèbre orientaliste M. Klaproth; veuillez me pardonner si j'ose vous faire tant de peine.

Kœnigsberg, ce 14 mars 1825.

MONSIEUR,

Je vous remercie mille fois de votre lettre du 9 février, et, comme vous m'y proposez diverses questions, je veux chercher à y répondre. Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par α_m , en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose *tout à fait impossible* dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module.

Ma formule qui donne l'expression algébrique de $\sin am(u)$ au moyen de $\sin am(nu)$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss.

M. Abel a traité, dans son premier *Mémoire sur les Fonctions Elliptiques*, le Problème en question pour la première fois d'une manière générale; il a montré qu'il est toujours possible de réduire la division de la fonction indéfinie à celle de la fonction entière; ensuite il a mon-

tré que l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, de laquelle dépend cette dernière, se réduit à une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients dépendent d'une autre équation du degré $n+1$, n étant premier. En effet, l'équation du degré n^2 entre $\sin \operatorname{am}(u)$ et $\sin \operatorname{am}(nu)$ a pour racines les n^2 expressions contenues sous la forme $\sin \operatorname{am}\left(u + \frac{2mK + 2im'K'}{n}\right)$, où l'on donne à m, m' les valeurs $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

En supposant $u=0$, une racine devenant $\sin \operatorname{am}(u)=0$ et les autres devenant égales deux à deux, mais de signes opposés, l'expression $\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2mK + 2im'K'}{n}\right)$ ne dépend plus que d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, comme vous l'avez montré par des exemples dans vos Traités.

Supposons n premier, et soit $\frac{mK + m'iK'}{n} = \omega$, on prouve aisément qu'une fonction symétrique quelconque de $\sin^2 \operatorname{am}(2\omega), \sin^2 \operatorname{am}(4\omega), \dots, \sin^2 \operatorname{am}[(n-1)\omega]$, par exemple celle-ci :

$$\sin^4 \operatorname{co am} 2\omega . \sin^4 \operatorname{co am} 4\omega . \dots \sin^4 \operatorname{co am} (n-1)\omega \left(= \frac{h}{K^n} \right),$$

ne peut obtenir plus que $n+1$ valeurs différentes, en mettant pour $\sin^2 \operatorname{am}(2\omega)$ une quelconque des racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Ces valeurs différentes répondent aux valeurs de $\omega = K, iK', K+iK', 2K+iK', \dots, (n-1)K+iK'$. En effet, toutes les racines de l'équation $\frac{n^2-1}{2}$ étant contenues sous la forme $\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)$, où l'on donne à p les valeurs $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$, à ω les $n+1$ valeurs mentionnées, et le système des quantités $\sin^2 \operatorname{am} 2\omega, \dots, \sin^2 \operatorname{am}(n-1)\omega$ pouvant être remplacé par le système de celles-ci : $\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega), \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega), \dots, \sin^2 \operatorname{am}[(n-1)p\omega]$, il suit que les fonctions géométriques de ces quantités ne sauront obtenir que les $n+1$ valeurs que l'on obtient en mettant pour ω des valeurs différentes et *incommensurables* entre elles. Donc elles dépendent d'une équation algébrique du degré $n+1$. C'est donc aussi le degré de l'équation dont les racines sont les différents modules transformés attachés au nombre n supposé premier, et que j'appelle

equatio modularis, ces modules étant contenus sous la forme

$$h = \chi^n [\sin \operatorname{coam} 2\omega . \sin \operatorname{coam} 4\omega . . . \sin \operatorname{coam} (n-1)\omega]^4.$$

Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les Fonctions Elliptiques*, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveront une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.

Mais peut-être, Monsieur, vous aurez à faire des objections à cette démonstration. Dans ce cas, vous m'obligerez de beaucoup en me les communiquant, car lorsque je traiterai de mes théories nouvelles il faudra en parler.

Étant connue une seule des fonctions symétriques de $\sin^2 \operatorname{am}(2\omega), \dots$, la théorie générale des équations algébriques nous apprend, et M. Abel l'a remarqué, qu'il est possible d'exprimer par celle-ci toute autre fonction symétrique des mêmes quantités. C'est la cause de ce que vous avez pu exprimer rationnellement en fonctions des deux modules les coefficients des transformations attachées aux nombres 3 et 5, et il sera de même pour tout autre nombre. Vous trouverez même dans le 2^e cahier du vol. IV du *Journal de M. Crelle* une formule à différences partielles très-remarquable qui sert à exprimer *généralement* ces coefficients par ces deux modules, en supposant connue l'équation aux modules; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque *indéfini*: chose très-difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4^e cahier du vol. III dudit Recueil. Il sera de même si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le *régulateur*, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples. Aussi j'ai découvert une propriété

tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3^e cahier du vol. III : c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs *racines carrées* au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n + 1$.

J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n + 1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique peut être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant. Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel : presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les Fonctions Elliptiques contient des vues nouvelles; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'en occuper.

Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \alpha_m(2p\omega)$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n = 5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement. J'ai trouvé le théorème remarquable, et je l'ai annoncé dans le 2^e cahier du vol. IV du Journal mentionné, qu'étant supposées connues *toutes les racines* de l'équation aux modules, ou tous les régulateurs qui répondent au nombre n , on peut exprimer les quantités $\sin \alpha_m$ *sans avoir besoin de résoudre encore aucune équation algébrique*. La méthode de M. Abel ne suppose connu qu'un seul module transformé pour trouver, par la résolution d'une équation algébrique du $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré, les quantités $\sin \alpha_m$ qui répon-

dent à ce module; la connaissance de *tous* les modules transformés remplacera donc la résolution de cette équation.

Je ne crois pas que la formule que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière lettre perdra à vos yeux à présent où vous voyez qu'elle contient des coefficients que je ne sais pas déterminer, mais en même temps qu'il est impossible de les déterminer algébriquement.

L'impression de mon Ouvrage s'est retardée, puisqu'il s'imprime à 500 lieues de Kœnigsberg; sans cela, il serait déjà dans vos mains; cependant j'espère pouvoir vous le faire parvenir dans très-peu de temps. Il ne contiendra que les fondements de mes travaux; je publierai le reste dans des Mémoires isolés, puisque cela paraît être plus conforme à vos vœux.

Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégrale d'Euler! A-t-on jamais vu pareille chose! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre Académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères?

Vos lettres, Monsieur, font époque dans le cours de mes travaux. Veuillez donc me daigner honorer bientôt d'une réponse, et, comme j'irai voir mes parents à *Postdam*, je vous prie de l'adresser à cette ville. Je vous prie aussi de vouloir bien excuser mille inconvénients qui naissent de ce qu'il faut que j'écrive dans une langue qui m'est étrangère.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Postdam, le 23 mai 1829.

MONSIEUR,

Je vous rends grâce de votre lettre du 8 avril qui me mande la publication d'un Supplément, que j'attends avec une grande impatience. Vos deux Suppléments embrasseront sans doute la plupart de ce qui se trouvera de nouveau et d'intéressant dans mon Ouvrage et beaucoup

d'autres choses qui ne s'y trouvent pas. L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des Géomètres leur ensemble.

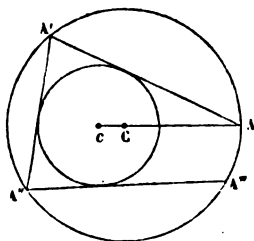
En ce qui regarde les Intégrales Elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complètement raison; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter de mérite à votre division des Intégrales Elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas. En effet, ces deux classes diffèrent essentiellement entre elles, le paramètre et l'amplitude dans l'une d'entre elles pouvant être réunis dans une seule variable, et l'autre pouvant être rapportée en même temps au module donné et à son complément. Je pourrais vous parler davantage sur cette matière, mais j'aime mieux voir auparavant votre second Supplément.

J'ai déjà communiqué à M. Crelle, pour le faire insérer dans son Journal, un premier Mémoire qui fait partie d'une suite de Mémoires dans lesquels je veux exposer, avec les démonstrations et les développements nécessaires, les différents résultats auxquels je suis parvenu, et dont j'ai déjà annoncé la plupart sans démonstration. Vous y trouverez les formules générales qui se rapportent à la transformation des Intégrales Elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, présentées sous une forme commode et élégante. Vous y trouverez aussi les

formules générales qui donnent leurs valeurs dans le cas que $F(\varphi)$ est commensurable avec la fonction entière F' , ou plus généralement $= \frac{mF'(x) + nF'(x')\sqrt{-1}}{p}$, m, n, p étant des nombres entiers. Mais le but principal de ce premier Mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les Mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des Transformations irrationnelles ou inverses et de la section des Fonctions Elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.

Dans un Mémoire écrit en allemand, et qui a été inséré dans le 3^e volume du *Journal de M. Crelle*, j'ai donné une construction *plane* de la multiplication des Fonctions Elliptiques.

Soit $AA'A''A''' \dots$ une partie d'un polygone inscrit au cercle C et cir-



conscrit au cercle c , A étant situé dans le prolongement de Cc ou de la droite qui joint les deux centres : si l'on met $AA' = 2\varphi_1$, $AA'' = 2\varphi_2$, $AA''' = 2\varphi_3, \dots$, on aura

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1), \quad F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1), \dots$$

Le module se détermine par la distance du centre C à la sécante idéale commune aux deux cercles. Donc si l'on veut trouver un angle φ_n tel que $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, on n'a qu'à décrire un cercle c , qui touche la droite AA' et qui a une sécante idéale donnée commune avec le cercle C ; ensuite on mène au cercle c les tangentes $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{(4)}$, ...; les points A'' , A''' , $A^{(4)}$, ... étant situés tous dans la périphérie du cercle C ; la $n^{\text{ième}}$ tangente étant $A^{(n-1)}A^{(n)}$, on aura $AA_n = 2\varphi_n$. Les arcs de cercles peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point des limites, comme celle de Lagrange. On voit

ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des Fonctions Elliptiques, comme celle des polygones réguliers des Fonctions Circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{hy}$, x étant changé en $\frac{1}{hx}$, vous concluez que la valeur de y , qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = M \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-n^2x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaitrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Postdam, je vous prie d'y adresser une réponse que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

Postdam, le 14 juin 1829.

MONSIEUR,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le Baron de Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez

bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue. Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Koenigsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des Intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème qu'« étant »
 » trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconques U ,
 » V et T , telles que

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2) T^2,$$

ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des Fonctions Elliptiques, comme celle des polygones réguliers des Fonctions Circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{hy}$, x étant changé en $\frac{1}{hx}$, vous concluez que la valeur de y , qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = M \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-n^2x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaitrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Postdam, je vous prie d'y adresser une réponse que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

Postdam, le 14 juin 1829.

MONSIEUR,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le Baron de Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez

bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue. Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Königsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des Intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème qu'« étant »
 » trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconques U ,
 » V et T , telles que

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - x^2 x^2) T^2,$$

ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des Fonctions Elliptiques, comme celle des polygones réguliers des Fonctions Circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{hy}$, x étant changé en $\frac{1}{hx}$, vous concluez que la valeur de y , qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = M \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-n^2x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaitrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Postdam, je vous prie d'y adresser une réponse que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

Postdam, le 14 juin 1829.

MONSIEUR,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans votre lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire pour l'Académie. Je l'ai adressé à M. le Baron de Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez

bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue. Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Koenigsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des Intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème qu'« étant
• trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconques U ,
• V et T , telles que

$$(U^2 - V^2)(U^2 - \lambda^2 V^2) = (1 - x^2)(1 - x^2 x^2) T^2,$$

• on aura toujours, en mettant $y = \frac{U}{V}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-n^2 x^2)}},$$

• M désignant une constante ; théorème fondamental qui a été prouvé au commencement de ma démonstration, et dont il ne se trouve pas fait mention dans le premier Supplément. Dans mon Ouvrage, j'ai désigné ce théorème sous le nom de *principe de la transformation des Fonctions Elliptiques*. En effet, ce principe suffit pour qu'on puisse établir la théorie générale de la transformation, en réduisant cette dernière à un problème algébrique qu'on peut toujours résoudre, les constantes indéterminées étant en nombre suffisant pour remplir les conditions du problème. Pour compléter ma démonstration, telle qu'elle se trouve dans le premier Supplément, il suffira d'ajouter en peu de mots la démonstration du théorème mentionné. La double substitution vous fournissant les valeurs de $U \pm V$, $U \pm \lambda V$ résolues en facteurs, et telles qu'on a

$$U - V = (1 - x)A^2, \quad U - \lambda V = (1 - nx)C^2,$$

$$U + V = (1 + x)B^2, \quad U + \lambda V = (1 + nx)D^2,$$

A, B, C, D étant des fonctions entières, tout se trouvera prouvé rigoureusement. Abel s'est servi du même principe, de sorte que nos démonstrations sont au fond les mêmes. Vous êtes le premier, Monsieur, qui avez montré qu'on peut s'en passer, en effectuant la substitution elle-même au moyen de la résolution en fractions simples. Aussi je n'ai pas tardé à exposer dans mon Ouvrage cette démonstration, qui vous est propre et qui donne une excellente vérification. A présent, je suis en possession d'un nombre assez grand de démonstrations différentes. Je remarque, à cette occasion, que le mérite principal d'Abel, dans la théorie de la Transformation, consiste dans sa démonstration que *nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles*, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.

Vous vous plaignez des infirmités de votre âge. Ah! Monsieur, ces excellents Suppléments que vous venez de composer, en partant de quelques légères notices que j'avais données sans démonstration, montrent que c'est encore la vigueur et l'énergie de la jeunesse qui vous animent,

et font concevoir l'espérance que le Ciel conservera encore longtemps une vie aussi chère.

Mes parents m'ont prié de vous faire leurs civilités et vous rendent grâces des bontés que vous avez bien voulu avoir pour moi. Soyez assuré, Monsieur, que je n'oublierai jamais ces bontés, et que je suis avec le respect le plus profond

Votre tout dévoué,

C.-G.-J. JACOBI.

Je ne retournerai à Kœnisberg que cet hiver.

Francfort, le 19 avril 1829.

MONSIEUR,

Dans un voyage que j'ai entrepris en Allemagne, étant arrivé près des rivages du Rhin, je ne puis résister au désir de vous voir à Paris. J'y partirai donc dans quelques jours pour y passer plusieurs semaines. Je ne saurais mieux profiter de la permission que le Gouvernement m'a voulu accorder pour ce semestre pour pouvoir jouir d'une récréation de mes études. Je brûle du désir de voir l'homme auquel je suis le plus redevable des bontés qu'il a voulu avoir pour moi, et de lui témoigner tous les sentiments que peuvent inspirer l'admiration et la reconnaissance.

Comme j'écris ceci en hâte, je ne puis répondre que quelques mots aux réponses que vous m'avez faites dans votre dernière lettre, et pour lesquelles je vous rends grâce mieux encore que pour les éloges que vous m'avez prodigués et que j'ai si peu mérités. Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions $\sin. am.$, $\cos. am.$, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions $\sin.$, $\cos.$ dites *circulaires*. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des Fonctions Elliptiques au Calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'Analyse, et qui ont été accueillies par tous les Géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous

donnez le nom de *Fonctions Elliptiques de la première, seconde, troisième espèce, Intégrales Elliptiques de la première, seconde, troisième espèce*, et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de *Fonctions Elliptiques* aux $\sin. am.$, $\cos. am.$ $\Delta am.$, analogiquement comme on nomme *Fonctions Circulaires* les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet.

Votre tout dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Kœnisberg, le 2 juillet 1830.

MONSIEUR,

Je vous prie de vouloir bien m'excuser de ne vous avoir pas plus tôt donné des nouvelles de moi, car c'aurait dû être pour moi un devoir que de vous rendre grâce des bontés que vous m'avez eues pendant mon séjour à Paris et de vous dire que je compte le temps que vous m'avez permis de passer avec vous parmi les moments les plus heureux de ma vie. Les distractions d'un long voyage et d'autres circonstances ayant interrompu le cours de mes travaux, je n'ai su reprendre sitôt le fil de mes recherches ordinaires; et j'étais trop accoutumé à vous parler mathématiques et à vous raconter quelque chose de nouveau qui pouvait mériter votre indulgence pour remplir une lettre avec les seuls sentiments de ma reconnaissance. Mais, après avoir reçu le cadeau précieux que vous venez de me faire par l'envoi de la troisième édition de votre Ouvrage sur les Nombres, je ne veux pousser plus loin un délai peu excusable. La partie la plus grande du tome II de votre Ouvrage étant entièrement nouvelle, j'ai eu occasion d'y admirer de nouveau cette rigueur d'esprit qui fait vaincre les difficultés et surpasser, même dans un âge avancé, les efforts des jeunes Géomètres auxquels votre vie glorieusement sacrée aux progrès de la science sera pour toujours un modèle d'émulation. J'ai vu aussi avec plaisir que vous avez voulu profiter de ma remarque relative à la loi de Réciprocité. J'avais espéré de trouver dans l'exemplaire que vous m'avez adressé quelques lignes de votre

main qui me parlaient de vous et de la santé de M^{me} Legendre; mais je l'ai feuilleté inutilement et me voilà puni pour ma négligence assez sévèrement.

Pour ne pas laisser cette lettre sans les signes de calcul, je vais vous faire une observation relative à l'équation $4 \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = Y^2 \pm nZ^2$. Pour trouver Y, votre Ouvrage donne la règle de développer $2(x - 1)^{\frac{n-1}{2}}$ et de remplacer les coefficients par les *plus petits* résidus qu'ils laissent étant divisés par n . Cette règle, qui se trouve déjà dans la seconde édition, n'est cependant juste que pour des nombres premiers peu grands. Les valeurs exactes de Y et de Z sont données dans chaque cas par les formules connues qui expriment les coefficients d'une équation au moyen des sommes des puissances de ses racines, sommes qui, dans notre cas, sont ou $\frac{-1 + \sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1 - \sqrt{\pm n}}{2}$. C'est ainsi qu'on trouve, qu'étant posé

$$Y = n(x - r)(x - r^2)(x - r^3) \dots \left[x - r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right] = nx^{\frac{n-1}{2}} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{n-5}{2}} + \dots,$$

la règle est exacte pour les trois premiers coefficients a_1, a_2, a_3 , mais qu'elle cesse de l'être pour les suivants dès que n surpasse une certaine limite, de sorte que les coefficients de Y et de Z peuvent surpasser $\frac{1}{2}n$ et même n et les puissances de n . Soit par exemple n de l'une des quatre formes :

(1) $24\mu + 1,$	on aura $a_1 = (1) \frac{(n-1)(n-105)}{192} + n,$
(2) $24\mu + 5,$	(2) $\frac{(n-5)(n-21)}{192},$
(3) $24\mu + 13,$	(3) $\frac{(n+3)(n+35)}{192},$
(4) $24\mu + 17,$	(4) $\frac{(n+7)(n+15)}{192},$

expressions qui pour de grands n sont de l'ordre $\frac{n^2}{192}$ et peuvent surpasser n de beaucoup.

Généralement on trouve que, pour de grands n , a_{2m} et a_{2m+1} sont

de l'ordre $\frac{1}{3.4.5\dots 2m} \left(\frac{n}{4}\right)^m$. Peut-être vous jugerez convenable de faire une addition de quelques lignes à votre Ouvrage pour limiter l'énoncé de la règle mentionnée.

J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté les deux transformations, qui, étant jointes entre elles, conduisent à la multiplication des Fonctions Elliptiques, en quoi il a été guidé sensiblement par vos Suppléments. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne nous pas être occupés de préférence du mouvement de la Chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde. Quoi qu'il en soit on doit vivement regretter que M. Fourier n'ait pu achever son Ouvrage sur les équations, et de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer.

En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux Fonctions Elliptiques et aux transcendents d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}}$.

Je crois entrevoir à présent que tous ces transcendents jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendents qui répondent à différentes valeurs de x . J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthodes dans lesquelles doivent entrer les théories nouvelles des Fonctions Elliptiques.

Je vous prie, Monsieur, de me rappeler à la mémoire de M^{me} Legendre, qui a voulu participer avec tant de bienveillance aux bontés que vous m'avez eues; je vous prie en même temps de faire mes civilités à M^{lle} Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connais-

sance, et de me dire des nouvelles de sa santé, si vous daignez me répondre.

Agréez, Monsieur, les assurances de mon entier dévouement.

Votre très-humble serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Kœnisberg, ce 27 mai 1832.

MONSIEUR,

Je ne sais comment excuser le long intervalle de temps qui s'est écoulé sans que je vous ai donné quelque témoignage de mon dévouement, et sans que je vous aie rendu compte de mes travaux, comme j'avais coutume d'après votre permission bienveillante dans le premier temps où je m'occupais des Fonctions Elliptiques. J'aurais bien voulu pouvoir vous avertir de l'achèvement de quelque ouvrage plus étendu, mais pendant tout ce temps-ci je n'ai pu regagner ni le goût ni l'énergie de jadis. Ce n'auraient été que des ouvrages commencés ou même seulement projetés dont j'aurais pu faire mention à vous, qui ne cessez de publier des ouvrages également distingués par leur étendue et par leur riche teneur, et cela presque dans l'âge où se trouvait Oughtred lorsque Wallis lui dédia son *Arithmetica Infinitorum*. J'ai lu le troisième Supplément qui finit le troisième volume de votre grand Ouvrage sur les Fonctions Elliptiques à Postdam où je me suis rendu pour voir mon père malade, qui mourut huit jours après mon arrivée, à l'âge pas même accompli de cinquante-neuf ans. Je lui devais la reconnaissance la plus haute. Ce furent ses assistances libérales qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences, et l'étendue de mes obligations envers lui me rendit ce triste événement plus amer encore. Dans ce temps d'une douleur profonde, Monsieur, c'était l'étude de votre Ouvrage, qui m'a été communiqué par M. Crelle, qui fit mon soulagement et en quelque sorte ma consolation. Dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. Crelle, j'ai cherché à relever les mérites irrécusables du Géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines

grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l' α et l' ω de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, et d'avoir montré à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir.

Les limites d'une lettre ne permettent pas de vous parler de mes travaux sur les Perturbations célestes. En attendant j'ai éprouvé moi-même des perturbations pas moins célestes et qui ont fini par un mariage heureux. L'intérêt que vous avez bien voulu me témoigner me fait croire que vous prendrez quelque part à ce qui fait le bonheur et le charme de ma vie. Depuis les huit mois de mon mariage j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé, et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes. Je ne veux vous dire que deux mots d'un nouveau résultat obtenu par mes recherches sur les Nombres, à la publication desquelles je n'ai encore pu parvenir: c'est *la résolution trigonométrique du problème de Pell*. En effet j'exprime généralement par $\cos \frac{2m\pi}{a}$ et $\sin \frac{2m\pi}{a}$ deux nombres entiers x et y tels que $x^2 - ay^2 = 1$.

J'ai trouvé même une généralisation du problème de Pell qui me paraît être très-remarquable et qui se rapporte au cas où a est le produit de deux ou de plusieurs facteurs. En effet supposons que a soit le produit des deux facteurs b et c , on peut d'une infinité de manières trouver quatre nombres entiers u, v, w, x tels, que le produit des quatre facteurs

$$(u + v\sqrt{b} + w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})(u + v\sqrt{b} - w\sqrt{c} - x\sqrt{bc}) \\ \times (u - v\sqrt{b} + w\sqrt{c} - x\sqrt{bc})(u - v\sqrt{b} - w\sqrt{c} + x\sqrt{bc}),$$

soit égal à l'unité. On donne aisément à ce produit les trois formes : $y^2 - bz^2, y'^2 - cz'^2, y''^2 - az''^2$; donc a étant $= b$, on peut faire dépendre les six nombres y, z, y', z', y'', z'' , lesquels donnent $y^2 - bz^2 = 1, y'^2 - cz'^2 = 1, y''^2 - az''^2 = 1$, des quatre nombres plus simples u, v, w, x . Vous voyez aisément comment cela doit être étendu au cas où a est le produit d'un nombre quelconque de facteurs. Dans tous les cas, je donne les nombres u, v, w, x, \dots par des formules générales et trigo-

nométriques. Si vous le jugez convenable, et s'il ne vous fait pas de peine en aucune sorte, vous pourriez communiquer à l'Académie des Sciences la Notice que je viens de vous donner sur cette nouvelle manière de résoudre le fameux problème de Pell. Je remarque en outre qu'il doit exister des algorithmes, analogues aux fractions continues, qui pourront servir à trouver les nombres u, v, w, x et leurs analogues dans le cas d'un plus grand nombre de facteurs de a , et je crois que la recherche de ces algorithmes sera une chose de quelque importance pour la science des Nombres.

Les Fonctions Elliptiques et la science des Nombres ne devraient pas manquer à l'avenir dans les leçons données aux élèves de l'École Polytechnique, si l'on veut que ces leçons soient conformes aux progrès du temps. Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières. Vous verrez plusieurs fruits de leurs travaux dans les volumes suivants du *Journal de M. Crelle*. Ce sont encore, Monsieur, les fruits de vos travaux que ces branches de la science, jadis peu connues, vont devenir la possession commune des Géomètres.

De mon retour à Kœnigsberg, j'y trouvais votre bel Ouvrage dont votre bonté a bien voulu me gratifier, et je m'empresse de vous dire mes remerciements de ce que votre générosité l'a voulu emporter sur ma négligence. Ajoutez, Monsieur, à cette générosité quelques lignes de votre main, qui m'ont toujours été si précieuses et qui pourront me donner l'assurance de ce que vous n'êtes pas fâché de moi.

Je vous prie, Monsieur, de recommander Marie Jacobi aux bonnes grâces de M^{me} Legendre, et de vouloir bien agréer les assurances de mon dévouement le plus parfait.

Votre serviteur très-humble,

C.-G.-J. JACOBI.



SUR UN

PROBLÈME DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR M. J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

I.

Un savant anglais, M. Crofton, a communiqué, il y a quelque temps, à l'Académie un théorème de calcul intégral qui n'a pas manqué de fixer l'attention des géomètres, tant à cause de l'élégance du résultat obtenu que de la méthode singulière et ingénieuse dont l'auteur a fait usage pour l'établir. Voici en quels termes M. Crofton a énoncé son théorème :

« Soit un contour convexe de forme quelconque, dont la longueur totale est L , et qui renferme un espace Ω ; si l'on appelle θ l'angle des deux tangentes menées d'un point extérieur (x, y) à ce contour, on aura l'intégrale

$$\iint (\theta - \sin \theta) dx dy = \frac{1}{2} L^2 - \pi \Omega$$

pour toute la surface du plan, extérieure au contour (*). » x et y désignent, bien entendu, des coordonnées rectangulaires.

Il est très-remarquable que ce théorème subsiste lorsque le contour convexe L , au lieu d'être une courbe continue, est formé de parties droites ou courbes faisant entre elles des angles quelconques. L'angle θ

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VI.

est toujours celui sous lequel le contour L est vu du point dont les coordonnées rectangulaires sont x et y ; mais les droites *circonscrivantes* qui en sont les côtés ne sont plus nécessairement des tangentes, et elles peuvent pivoter autour des divers sommets du contour.

Il est évident que, pour établir la formule de M. Crofton dans toute sa généralité, il suffit de se borner au cas où le contour L est un polygone rectiligne convexe d'un nombre quelconque n de côtés; la démonstration peut être alors présentée d'une manière très-simple, comme il suit.

L'origine des coordonnées étant placée à l'intérieur du polygone, soit ω l'angle formé par le rayon vecteur du contour L avec la direction des abscisses positives. Nous supposons que cet angle croisse lorsque le rayon vecteur se meut en s'élevant de l'axe des x vers l'axe des y , et nous représenterons par A_0, A_1, \dots, A_{n-1} les sommets du polygone dans l'ordre où ils sont rencontrés, chaque indice pouvant être, si l'on veut, augmenté de n ; nous désignerons par ω_{i-1} la valeur de ω , lorsque le rayon vecteur est perpendiculaire au côté $A_{i-1} A_i$.

Posons

$$(1) \quad V = \iint (\theta - \sin \theta) dx dy,$$

et désignons par $V_{i,j}$ la partie de l'intégrale V qui répond au cas où les droites circonscrivantes ne font que pivoter autour des sommets respectifs A_i, A_j . Soient α, β les valeurs que prend ω quand le rayon vecteur du contour est perpendiculaire à ces droites; les variables α, β seront liées aux coordonnées x, y par les équations

$$(2) \quad \begin{cases} (x_i - x) \cos \alpha + (y_i - y) \sin \alpha = 0, \\ (x_j - x) \cos \beta + (y_j - y) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

et si l'on fait

$$(3) \quad \begin{cases} A_{i,j} = (x_i - x_j) \cos \alpha + (y_i - y_j) \sin \alpha, \\ B_{j,i} = (x_j - x_i) \cos \beta + (y_j - y_i) \sin \beta, \end{cases}$$

on aura, par les formules (2),

$$\frac{dx}{d\beta} \frac{dy}{d\alpha} - \frac{dx}{d\alpha} \frac{dy}{d\beta} = \frac{A_{i,j} B_{j,i}}{\sin^2(\beta - \alpha)};$$

d'où il suit que, dans le système des variables α, β , l'élément superficiel est représenté par

$$\pm \frac{A_{i,j} B_{j,i}}{\sin^2(\beta - \alpha)} d\alpha d\beta.$$

$A_{i,j}$ et $B_{j,i}$ sont des quantités positives, et si l'on pose

$$(4) \quad \beta - \alpha = \pi - \theta,$$

on aura

$$(5) \quad V_{i,j} = \int \int \frac{\theta - \sin \theta}{\sin^2 \theta} A_{i,j} B_{j,i} d\alpha d\beta;$$

l'intégration doit s'étendre aux valeurs de α, β respectivement comprises entre ω_{i-1} et ω_i , ω_{j-1} et ω_j . Nous supposons $j > i$; l'angle θ , défini par la formule (4), est toujours compris entre les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Les intégrations relatives à α et à β s'exécutent très-simplement, par le moyen des relations

$$(6) \quad \begin{cases} B_{j,i} = A_{i,j} \cos \theta - \frac{dA_{i,j}}{d\alpha} \sin \theta, \\ A_{i,j} = B_{j,i} \cos \theta + \frac{dB_{j,i}}{d\beta} \sin \theta, \end{cases}$$

et

$$(7) \quad D_{i,j}^2 \sin^2 \theta = A_{i,i}^2 - 2 A_{i,j} B_{j,i} \cos \theta + B_{j,i}^2$$

qui résultent des formules (3); $D_{i,j}$ désigne la distance des sommets A_i, A_j du polygone L. Posons, pour abréger l'écriture,

$$(8) \quad \Theta = \frac{1}{2} \left[\log(1 + \cos \theta) - \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta} \right],$$

et

$$(9) \quad f_{i,j}(\alpha, \beta) = (A_{i,i}^2 + B_{j,i}^2) \Theta + \frac{1}{2} A_{i,j} B_{j,i} \frac{\theta}{\sin \theta} + \left(-A_{i,j} B_{j,i} + \frac{1}{2} D_{i,j}^2 \cos \theta \right);$$

on trouve aisément que l'on a

$$\frac{\theta - \sin \theta}{\sin^2 \theta} A_{i,j} B_{j,i} = \frac{d^2 f_{i,j}(\alpha, \beta)}{d\alpha d\beta},$$

et, par conséquent, la formule (5) donnera

$$(10) \quad V_{i,j} = f_{i,j}(\omega_i, \omega_j) - f_{i,j}(\omega_i, \omega_{j-1}) - f_{i,j}(\omega_{i-1}, \omega_j) + f_{i,j}(\omega_{i-1}, \omega_{j-1}).$$

Si l'on attribue à j les valeurs $i+1, i+2, \dots, i+n-1$, puis à i les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, et que l'on ajoute ensemble toutes les valeurs de $V_{i,j}$ ainsi obtenues, il est évident que l'on formera le double $2V$ de l'intégrale à évaluer, car chaque point du plan aura été rencontré deux fois. Soit $U_{\mu,\nu}$ la partie de cette somme $2V$ qui dépend des angles ω_μ, ω_ν , la valeur de $U_{\mu,\nu}$ se déduira de celle de $V_{i,j}$ en donnant à i, j les valeurs μ, ν dans le premier terme du second membre de la formule (8); $\mu, \nu+1$, dans le deuxième terme; $\mu+1, \nu$ dans le troisième, et $\mu+1, \nu+1$ dans le quatrième. On a donc

$$(11) \quad U_{\mu,\nu} = f_{\mu,\nu}(\omega_\mu, \omega_\nu) - f_{\mu,\nu+1}(\omega_\mu, \omega_\nu) - f_{\mu+1,\nu}(\omega_\mu, \omega_\nu) + f_{\mu+1,\nu+1}(\omega_\mu, \omega_\nu),$$

ce qui, à cause de la formule (9), se réduit à

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} U_{\mu,\nu} &= [(x_\nu - x_{\nu+1})(y_\mu - y_{\mu+1}) - (x_\mu - x_{\mu+1})(y_\nu - y_{\nu+1})] \frac{\pi + \omega_\mu - \omega_\nu}{2} \\ &\quad + D_{\mu,\mu+1} D_{\nu,\nu+1}. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, on obtiendra l'intégrale $2V$ en faisant la somme de toutes les valeurs que prend $U_{\mu,\nu}$ quand on donne à chacun des indices μ, ν toutes les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, avec la précaution d'ajouter 2π à ω_ν lorsque ν est inférieur à μ . On a ainsi, après la suppression des termes qui se détruisent,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= -\frac{\pi}{2} \sum [(x_\nu - x_{\nu+1})(y_\mu - y_{\mu+1}) - (x_\mu - x_{\mu+1})(y_\nu - y_{\nu+1})] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum D_{\mu,\mu+1} D_{\nu,\nu+1}. \end{aligned} \right.$$

Dans la première partie de cette expression, l'indice ν doit être inférieur à μ , mais dans la seconde partie chaque indice doit recevoir les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$. On voit que cette seconde partie est égale à $\frac{1}{2} L^2$, et la première partie, qui se réduit à

$$-\frac{\pi}{2} \sum (x_\mu y_{\mu+1} - x_{\mu+1} y_\mu),$$

est égale au produit de $-\pi$ par l'aire Ω du polygone. On a donc

$$(14) \quad V = \frac{1}{2} L^2 - \pi \Omega.$$

II.

M. Crofton a été conduit à la formule que nous venons d'établir, par des considérations tirées du *Calcul des Probabilités*. Le Mémoire de l'habile Géomètre publié dans les *Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres* renferme plusieurs autres résultats intéressants pour le Calcul intégral, et l'Auteur en a ultérieurement obtenu de nouveaux. Dans une Lettre récente communiquée à l'Académie (*), M. Crofton fait connaître en effet le théorème suivant, remarquable par sa généralité.

Soit un contour convexe de forme quelconque qui renferme un espace Ω ; si l'on appelle C la corde qui joint deux points de contour, p la distance de cette corde à un point fixe O , et θ l'angle formé par la direction de la droite p avec une direction fixe Ox , on aura

$$\iint C dp d\theta = 3\Omega,$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs de p et de θ qui donnent une corde réelle C .

On peut démontrer ce nouveau théorème par une analyse analogue à celle dont nous venons de faire usage. Il suffit encore ici de considérer le cas où le contour donné est un polygone rectiligne convexe d'un nombre quelconque n de côtés; nous désignerons, comme plus haut, par A_0, A_1, \dots, A_{n-1} les n sommets dans l'ordre où ils sont rencontrés par un point mobile qui décrirait le contour en se mouvant toujours dans le même sens, chaque indice pouvant être, si l'on veut, augmenté de n .

Posons

$$(1) \quad V = \iint C^3 dp d\theta,$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 1469.

et désignons par $V_{i,j}$ la partie de cette intégrale qui répond au cas où les extrémités I, J de la corde C ne se meuvent que sur les côtés respectifs $A_i A_{i+1}$, $A_j A_{j+1}$ du polygone donné. Soient r et s les rapports $\frac{IA_i}{A_{i+1}A_i}$, $\frac{JA_j}{A_{j+1}A_j}$ qui varient entre les limites 0 et 1; nous prendrons ces rapports pour variables au lieu de p et θ . Alors, en représentant par x_μ , y_μ les coordonnées du sommet A_μ , relativement à deux axes rectangulaires menés par le point fixe O et dont l'un, celui des x , coïncide avec la direction donnée Ox , on aura

$$(2) \quad \begin{cases} p = [x_i + (x_{i+1} - x_i)r] \cos \theta + [y_i + (y_{i+1} - y_i)r] \sin \theta, \\ p = [x_j + (x_{j+1} - x_j)s] \cos \theta + [y_j + (y_{j+1} - y_j)s] \sin \theta, \end{cases}$$

et

$$(3) \quad \begin{cases} C \sin \theta = + [x_i + (x_{i+1} - x_i)r] - [x_j + (x_{j+1} - x_j)s], \\ C \cos \theta = - [y_i + (y_{i+1} - y_i)r] + [y_j + (y_{j+1} - y_j)s]. \end{cases}$$

De ces formules, on tire

$$\frac{dp}{dr} \frac{d\theta}{ds} - \frac{dp}{ds} \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{C^3} (G + Kr)(H - Ks),$$

en faisant, pour abréger l'écriture,

$$(4) \quad \begin{cases} G = (x_j - x_i)(y_{j+1} - y_j) - (y_j - y_i)(x_{j+1} - x_j), \\ H = (x_i - x_j)(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_j)(x_{i+1} - x_i), \\ K = (x_{j+1} - x_j)(y_{i+1} - y_i) - (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i); \end{cases}$$

on a donc

$$(5) \quad V_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 (G + Kr)(H - Ks) dr ds = \frac{1}{4} (2G + K)(2H - K).$$

Il est évident que si l'on donne à chacun des indices i, j , les valeurs 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ et qu'on ajoute toutes les valeurs de $V_{i,j}$, on obtiendra le double $2V$ de l'intégrale à évaluer; on a donc

$$(6) \quad V = \frac{1}{8} \sum (2G + K)(2H - K).$$

Mais

$$(7) \quad \begin{cases} 2G + K = 2(x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \\ \quad + (y_{i+1} + y_i)(x_{j+1} - x_j) - (x_{i+1} + x_i)(y_{j+1} - y_j), \\ 2H - K = 2(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ \quad + (y_{j+1} + y_j)(x_{i+1} - x_i) - (x_{j+1} + x_j)(y_{i+1} - y_i), \end{cases}$$

et il suffit de multiplier chacun des trois termes de la première expression par le terme correspondant de la seconde; effectivement les valeurs que prend le produit de deux termes non correspondants des formules (7), quand on donne à i et à j toutes leurs valeurs, ont pour somme zéro. Chacune des expressions

$$\sum (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}), \quad \sum (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$$

étant égale au double de l'aire Ω du polygone donné, on a

$$(8) \quad V = 3\Omega.$$



NOTE

SUR LES

SÉRIES DE TERMES POSITIFS,

PAR M. BAILLAUD,
ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

L'objet de cette Note est l'étude des séries de termes positifs. Bien que ces séries n'aient qu'une importance secondaire, on s'est beaucoup occupé des conditions de leur convergence, et on est parvenu à plusieurs règles de formes très-différentes. Peut-être sera-ce faire une chose utile, que de montrer comment ces règles sont liées les unes aux autres et peuvent toutes être rattachées à un même principe.

Cauchy a fait connaître le caractère général de convergence.

• La série de termes positifs

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

dans laquelle u_n va en décroissant quand n croît de a à ∞ , est convergente ou divergente selon que l'intégrale

$$\int_a^\infty u_n \, dn$$

est finie ou infinie. •

Cette règle est rarement applicable; en dehors des cas d'intégrabilité on sait peu de chose sur ce que devient une intégrale définie quand l'une des limites croît indéfiniment. Il semble plus aisé de chercher des

règles qui permettent de décider, dans le plus grand nombre des cas, si une série de termes positifs est convergente ou divergente, et de ramener la recherche de la convergence des intégrales définies à celle de la convergence des séries, au moyen du théorème de Cauchy. D'ailleurs, dans les applications on n'éprouve jamais de difficultés pour reconnaître si une intégrale définie, dont tous les éléments sont positifs, reste finie quand l'une des limites croit indéfiniment. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

Une série est convergente quand le rapport d'un terme au précédent a une limite moindre que 1 ; elle est divergente si cette limite est plus grande que 1, ou si elle est égale à 1, mais que le rapport soit toujours plus grand que 1. Cette règle, qui est la plus simple de toutes, est rarement applicable; le plus souvent, le rapport d'un terme au précédent a pour limite l'unité, et oscille autour de cette limite ou lui est toujours inférieur.

Cauchy donna une règle applicable dans ce cas; un peu plus tard, M. Augustus de Morgan, dans son *Traité de calcul intégral*, publia une série de règles applicables dans le cas douteux. M. Duhamel et M. Raabe parvinrent, chacun de leur côté, à une règle qui diffère beaucoup par la forme de celles de M. de Morgan. M. Bertrand, dans un Mémoire inséré au septième volume du *Journal de M. Liouville*, reprit la règle donnée par Cauchy et celle qu'avaient fait connaître M. Duhamel et M. Raabe, et en déduisit deux séries de règles de formes très-différentes. On avait ainsi trois séries de règles, dans chacune desquelles une règle peut être applicable précisément quand les précédentes n'ont pas été suffisantes. M. Bertrand montra en outre que ces trois séries de règles n'en forment qu'une, en ce sens que les quantités dont dépend dans chacune d'elles la convergence d'une série ont mêmes limites, de sorte que si l'une d'elles permet de résoudre la question, les autres le permettent également.

L'année suivante, M. Bonnet donna d'autres règles publiées aussi dans le *Journal de Mathématiques* et qui reviennent encore aux précédentes.

Bien que ces règles soient les mêmes au fond, elles ont toutes leur utilité propre, parce que, selon les cas, l'une ou l'autre pourra être plus facilement appliquée.

Dans ce qui va suivre, on a en vue de démontrer ces règles par une méthode uniforme, qui conduira à un théorème dont l'application est quelquefois très-rapide, mais qui ne devra être employé qu'avec réserve, à cause de l'incertitude qui règne sur les conditions de son exactitude. Ce théorème, sous la forme la plus générale qu'on lui donnera, devra être regardé plutôt comme un résultat philosophique propre à montrer la portée des règles que l'on a indiquées plus haut, que comme une règle pratique propre à démontrer la convergence des séries.

Dès que l'on s'occupe de la convergence des séries, on dut remarquer que, pour qu'une série soit convergente, il faut que nu_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment. Mais cette condition n'est pas suffisante; ainsi la série dont le terme général est

$$\frac{1}{n \ln n}$$

est divergente: cela résulte du caractère général donné par Cauchy, car cette expression toujours décroissante est la dérivée de

$$\ln n$$

qui est infini avec n . Il en résulte que pour qu'une série soit convergente il faut que

$$n \ln u_n$$

tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Mais cette condition n'est pas non plus suffisante.

La série qui a pour terme général

$$\frac{1}{n \ln n \ln \ln n \dots}$$

est divergente, car cette expression est la dérivée de

$$\ln \ln \dots n$$

qui est infini avec n . Donc pour qu'une série soit convergente il faut que

$$n \ln \ln \ln \ln \dots u_n$$

tende vers zéro quand n croît indéfiniment. Cette condition, d'ailleurs, n'est pas suffisante.

Mais Abel a montré qu'il faut renoncer à chercher un caractère absolu de ce genre; il a en effet établi le théorème suivant :

« *Il n'existe aucune fonction $\varphi(n)$ telle que toute série de termes positifs soit convergente quand $\varphi(n)u_n$ tend vers zéro et divergente dans le cas contraire.* »

La démonstration donnée par l'illustre auteur est trop connue pour qu'il soit utile de nous y arrêter.

Ce que je me propose ici, c'est de montrer que, s'il est impossible de donner une règle de ce genre applicable dans tous les cas, on peut cependant trouver une fonction $\varphi(n)$ telle, que, dans tous les cas où les règles de M. Bertrand et de M. Bonnet sont suffisantes pour démontrer la convergence d'une série, pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que $\varphi(n)u_n$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Pour mieux faire comprendre l'esprit de la méthode et la dégager de calculs auxiliaires, je considérerai d'abord un cas particulier bien célèbre, dont l'importance est telle, qu'un examen spécial ne sera pas déplacé. C'est d'ailleurs son étude qui m'a conduit aux développements ultérieurs: je veux parler de la règle de Gauss, que l'illustre géomètre a démontrée d'une façon si élégante, et dont M. Rouché a donné une démonstration très-simple dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Je m'appuierai constamment sur deux lemmes bien connus que je vais énoncer.

LEMME I. — Soit P un produit d'un nombre infini de facteurs binômes, de la forme

$$P = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \dots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ étant des quantités de même signe. En supposant que α_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit ne soit pas infini quand α_n est positif, ne tende pas vers 0 quand α_n est négatif, est que la série

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

soit convergente.

LEMME II. — Le second lemme que j'emploierai est dû à M. Kummer.

Soit $\varphi(n)$ une fonction telle, que $\varphi(n)u_n$ tende vers 0 quand n croît indéfiniment, et que de plus l'expression

$$\frac{\varphi(n)u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)u_{n+1}}{a} - u_{n+1}$$

soit positive quand n est très-grand, a étant un nombre déterminé arbitraire; la série $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$ est convergente.

(Voir pour ces deux lemmes et pour le théorème d'Abel, le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand.)

Observons d'abord que les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}$ ont même limite. Il en résulte que :

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, u_n et nu_n croissent indéfiniment avec n ; la série est donc divergente;

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, u_n et nu_n tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$; la série est convergente;

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, il y a incertitude relativement à la convergence de la série et à la limite de nu_n .

Règle de Gauss.

Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puisse se mettre sous la forme

$$\frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)},$$

λ étant un nombre quelconque qu'on peut toujours supposer > 1 , $\varphi(n)$ et $\psi(n)$ étant des fonctions de n infiniment petites par rapport à n^λ , dont la différence $\varphi(n) - \psi(n)$ est infiniment petite par rapport à $n^{\lambda-1}$, d'ordre déterminé si $A = a$.

Alors

- Si $A - a > 0$, les termes croissent indéfiniment;
 Si $A - a = 0$, les termes ont une limite finie différente de 0;
 Si $A - a < 0$, les termes tendent vers zéro;
 Si $A - a + 1 > 0$, la série est divergente et nu_n croît indéfiniment;
 Si $A - a + 1 = 0$, la série est divergente et nu_n a une limite finie;
 Si $A - a + 1 < 0$, la série est convergente et nu_n tend vers zéro.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)}.$$

On a aussi identiquement

$$u_{n+k+1} = u_n \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \dots \frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 + \frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)} \right] \dots \\ \times \left[1 + \frac{(A - a)(n + k)^{\lambda-1} + \varphi(n + k) - \psi(n + k)}{(n + k)^\lambda + a(n + k)^{\lambda-1} + \psi(n + k)} \right].$$

Si n est suffisamment grand, les numérateurs des seconds termes des facteurs du second membre sont très-petits par rapport aux dénominateurs, et ces seconds termes ont tous le même signe, qui est celui de leur partie principale. Le lemme I peut donc être appliqué à ce produit, de sorte que si la série dont le terme général est

$$\frac{(A - a)n^{\lambda-1} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \psi(n)}$$

est convergente, u_{n+k+1} a une limite finie.

Si cette série est divergente et que ses termes soient positifs, u_{n+k+1} croît indéfiniment.

Si cette série est divergente et que ses termes soient négatifs, u_{n+k+1} tend vers zéro.

Or ce terme général est égal à

$$\frac{A-a}{n} + \frac{n[\varphi(n) - \psi(n)] - (A-a)[an^{\lambda-1} + \psi(n)]}{n[n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)]}.$$

Quand n est très-grand, la deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, qui est le terme général d'une série divergente. Donc

Si $A - a > 0$, u_{n+k+1} croît indéfiniment;

Si $A - a < 0$, u_{n+k+1} tend vers zéro;

Si $A - a = 0$, les termes de la série se réduisent à $\frac{\varphi(n) - \psi(n)}{n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)}$.

Posons

$$\varphi(n) - \psi(n) = n^{\lambda-1-k}(E + \varepsilon),$$

k étant positif. L'expression précédente devient

$$\frac{E}{n^{k+1}} + \frac{\varepsilon n^{\lambda} - Ean^{\lambda-1} - E\psi(n)}{n^{k+1}[n^{\lambda} + an^{\lambda-1} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, qui est le terme général d'une série convergente. Donc u_{n+k+1} a une limite finie différente de zéro.

Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n^{\lambda+1} + (A+1)n^{\lambda} + n\varphi(n) + An^{\lambda-1} + \varphi(n)}{n^{\lambda+1} + an^{\lambda} + n\psi(n)}.$$

En appliquant les résultats précédents, on voit que

Si $A+1-a > 0$, nu_n croît indéfiniment;

Si $A+1-a = 0$, nu_n a une limite finie différente de zéro;

Si $A+1-a < 0$, nu_n tend vers zéro.

Appliquons maintenant le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le nombre n .
L'expression

$$\frac{nu_n}{\alpha} - \frac{(n+1)u_{n+1}}{\alpha} - u_{n+1}$$

est positive en même temps que

$$\frac{nu_n}{\alpha u_{n+1}} - \frac{n+1}{\alpha} - 1,$$

ou

$$(1) \quad \frac{n^\lambda(a - A - 1 - \alpha) + \dots}{\alpha[n^\lambda + An^{\lambda-1} + \varphi(n)]}.$$

Les termes qui ne sont pas écrits au numérateur sont infiniment petits par rapport au premier.

Si

$$A - a + 1 < 0,$$

ce qui est le seul cas où la série proposée puisse être convergente, puisque c'est le seul où nu_n tende vers zéro, on a

$$a - A - 1 > 0.$$

On peut donner à α une valeur positive assez petite pour que

$$a - A - 1 - \alpha$$

soit positif.

Il en sera de même de l'expression (1) pour $n = \infty$. Donc la série proposée est convergente.

Donc pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que $A - a + 1$ soit < 0 , et c'est le seul cas où nu_n tende vers 0. De sorte que toutes les fois que la règle de Gauss est applicable, pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers zéro.

Extension de la règle de Gauss.

Je vais appliquer la même méthode à un cas plus étendu, qui sera compris, il est vrai, comme le précédent, dans les règles que j'exposerai ultérieurement; mais outre l'intérêt que ce cas peut présenter, je serai conduit à formuler une conclusion identique à la précédente, tandis que les règles que j'indiquerai plus loin sembleraient imposer de plus grandes restrictions.

Je supposerai que pour des valeurs suffisamment grandes de n , le

rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puisse être mis sous la forme

$$\frac{n^\lambda + A n^{\lambda-k} + \varphi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)},$$

λ et k étant des nombres positifs tels que λ soit $> k$, $\varphi(n)$ étant infiniment petit par rapport à n^λ , et $\varphi(n) - \psi(n)$ étant infiniment petit par rapport à $n^{\lambda-k}$, d'ordre déterminé si $A = a$. Il y aura encore une restriction dans un cas particulier.

Si $k = 1$, on est dans le cas précédent: si j'avais pris tout d'abord cette forme, il eût fallu examiner à part l'hypothèse $k = 1$, de sorte qu'il n'y a pas eu double emploi.

Si $k > 1$, on est encore dans le cas précédent; seulement $A = 0$, $a = 0$; donc $A - a + 1 = 1$; la série proposée est donc divergente, u_n a une limite finie différente de zéro et nu_n croît indéfiniment.

Supposons donc $k < 1$.

Je vais appliquer la méthode identiquement de la même manière.

On a

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 + \frac{(A-a)n^{\lambda-k} + \varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)} \right] \dots$$

Les seconds termes des facteurs du second membre sont de la forme

$$\frac{A-a}{n^k} + \frac{n^k [\varphi(n) - \psi(n)] - a(A-a)n^{\lambda-k} - (A-a)\psi(n)}{n^k [n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, et comme k est < 1 , la série dont celle-ci est le terme général est divergente. Donc

Si $A - a > 0$, u_{n+k+1} croît indéfiniment;

Si $A - a < 0$, u_{n+k+1} tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$;

Si $A - a = 0$, le terme précédent devient

$$\frac{\varphi(n) - \psi(n)}{n^\lambda + a n^{\lambda-k} + \psi(n)}.$$

Posons

$$\varphi(n) - \psi(n) = n^{\lambda-k-k'} (E + \varepsilon),$$

E étant un nombre fini différent de zéro.

L'expression ci-dessus prend alors la forme

$$\frac{E}{n^{k+k'}} + \frac{\varepsilon n^\lambda - E[an^{\lambda-k} + \psi(n)]}{n^{k+k'}[n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n)]}.$$

La deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première.
Donc

Si $k + k' > 1$, u_{n+k+1} a une limite finie;

Si $k + k'$ est < 1 ou $= 1$ $\left\{ \begin{array}{l} E > 0, u_{n+k+1} \text{ croît indéfiniment;} \\ E < 0, u_{n+k+1} \text{ tend vers zéro.} \end{array} \right.$

Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{n^{\lambda+1} + An^{\lambda-k+1} + n^\lambda + n\varphi(n) + An^{\lambda-k} + \varphi(n)}{n^{\lambda+1} + an^{\lambda-k+1} + n\psi(n)}.$$

En appliquant les résultats précédents, on voit que

Si $A - a > 0$, nu_n croît indéfiniment;

Si $A - a < 0$, nu_n tend vers zéro;

Si $A - a = 0$, la quantité correspondante à $\varphi(n) - \psi(n)$ est

$$n^\lambda + n\varphi(n) + An^{\lambda-k} + \varphi(n) - n\psi(n),$$

ou

$$n^\lambda + n^{\lambda+1-k-k'}(E + \varepsilon) + An^{\lambda-k} + \varphi(n).$$

Donc

Si $k + k' > 1$, nu_n croît indéfiniment;

Si $k + k' < 1$, $\left\{ \begin{array}{l} E > 0, nu_n \text{ croît indéfiniment;} \\ E < 0, nu_n \text{ tend vers zéro.} \end{array} \right.$

Si $k + k' = 1$, $\left\{ \begin{array}{l} E + 1 > 0, nu_n \text{ croît indéfiniment;} \\ E + 1 < 0, nu_n \text{ tend vers zéro;} \\ E + 1 = 0, \text{ cette expression devient} \end{array} \right.$

$$\varepsilon n^\lambda + An^{\lambda-k} + \varphi(n).$$

Si ε est infiniment petit d'ordre déterminé, ou plus généralement si la série dont le terme général est $\frac{\varepsilon}{n}$ est convergente, nu_n a une limite finie.

Pour que la série soit convergente, il faut que nu_n tende vers 0; nous n'aurons donc que trois cas à examiner.

On a

$$\frac{nu_n}{\alpha u_{n+1}} - \frac{n+1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{\alpha(n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n))} [(a-A)n^{\lambda-k+1} - n[\varphi(n) - \psi(n)] - (1+\alpha)(n^\lambda + An^{\lambda-k} - \varphi(n))].$$

Si $A - a < 0$, cette expression est positive quand n est très-grand, pourvu que α soit positif; comme nu_n tend vers 0, la série est convergente.

Si $A - a = 0$ avec $k + k' < 1$ et $E < 0$, l'expression devient

$$\frac{1}{\alpha(n^\lambda + an^{\lambda-k} + \psi(n))} [-n^{\lambda+1-k-k'}(E + \varepsilon) + \dots],$$

les points remplaçant une quantité infiniment petite par rapport au premier terme.

Cette expression est positive si α est positive pour de grandes valeurs de n . La série est convergente.

Si $A - a = 0$ avec $k + k' = 1$ et $E + 1 < 0$, l'expression devient

$$\frac{1}{\alpha(n^\lambda + \dots)} [n^\lambda(-E - 1 - \alpha) + \dots].$$

Or $-E - 1$ est positif; on peut prendre α assez petit pour que $-E - 1 - \alpha$ le soit aussi. La série est encore convergente.

Et ces cas sont les seuls dans lesquels nu_n tende vers 0. Donc dans tous les cas qui sont compris dans la forme que je viens d'étudier, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers 0 quand n croît indéfiniment.

Comme application je considérerai la série

$$1 + 2^w + \frac{3^w}{2^{w+2}} + \dots + \frac{n^w}{(n-1)^{w+2}},$$

qui a été examinée par M. Raabe, puis par M. Bertrand, dans leurs Mémoires.

Il est bien clair qu'elle rentre dans le premier cas que je viens d'examiner, puisque le binôme $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}$ peut toujours être ordonné suivant

les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$. Donc pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que nu_n tende vers 0.

Or

$$nu_n = \frac{n^{w+1}}{(n-1)^{w+a}}.$$

Donc

Si $\alpha > 1$, la série est convergente;
 Si $\alpha = 1$,
 Si $\alpha < 1$, } la série est divergente.

Règles de M. Duhamel et de M. Bertrand.

Je vais considérer maintenant un cas beaucoup plus général que les précédents.

M. Duhamel a démontré la règle suivante :

Si dans une série de termes positifs, le rapport d'un terme au précédent peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, α étant une quantité infiniment petite telle que $n\alpha$ ait une limite finie k ,

Si k est > 1 , la série est divergente;
 Si k est < 1 , la série est convergente.

On s'assurera aisément que cette règle est comprise dans celle de Gauss, où l'on suppose $A - a$ différent de 0. Il est inutile d'en reprendre la démonstration.

M. Bertrand, prenant cette règle pour point de départ, a, comme je l'ai dit, formulé une série de règles dont chacune s'applique quand les précédentes n'ont pas suffi. Démontrons d'abord la première, puis nous envisagerons la question de la manière la plus générale.

Si, dans l'application de la règle de M. Duhamel, $\lim n\alpha = 1$, on mettra $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'},$$

et

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, la série est convergente;
 Si $\lim n \ln \alpha' < 1$, la série est divergente.

J'applique la méthode que j'ai exposée à l'occasion de la règle de Gauss.

On a

$$u_{n+k+1} = u_n \left[1 - \frac{\frac{1}{n} + \alpha'}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'} \right] \left[1 - \frac{\frac{1}{n+1} + \alpha'_1}{1 + \frac{1}{n+1} + \alpha'_1} \right] \dots$$

Les fractions du second membre sont toutes positives et très-petites quand n est très-grand. Elles forment une série dont le terme général est

$$\frac{1}{n} + \frac{\alpha' - \frac{\alpha'}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'},$$

et comme α' est infiniment petit par rapport à $\frac{1}{n}$, la deuxième partie est infiniment petite par rapport à la première, de sorte que cette série est divergente.

Donc u_{n+k+1} tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Cela étant, on a

$$\frac{(n+1)l(n+1)u_{n+1}}{n \ln u_n} = \frac{(n+1)l(n+1)}{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \alpha' \right)}.$$

Or

$$\begin{aligned} (n+1)l(n+1) &= (n+1) \left[\ln + l \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= n \ln + \ln + n l \left(1 + \frac{1}{n} \right) + l \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= n \ln + \ln + n \left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2} \right) + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{(n+1)l(n+1)}{n \ln} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln} + \frac{\eta}{n^2},$$

η étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

Donc

$$\frac{(n+1)l(n+1)u_{n+1}}{n \ln u_n} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{\eta}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'} = 1 - \frac{\alpha' - \frac{1}{n \ln n} - \frac{\eta}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \alpha'}.$$

La partie principale du deuxième terme étant $\alpha' - \frac{1}{n \ln n}$ quand $\lim n \ln \alpha'$ diffère de 1, ce second terme définit une série divergente.

Donc

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, $n \ln u_n$ tend vers 0;

Si $\lim n \ln \alpha' < 1$, $n \ln u_n$ croît indéfiniment.

Comme la série dont le terme général est $\frac{1}{n \ln n}$ est divergente, le premier cas est le seul où la proposée puisse être convergente.

Appliquons le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le produit $n \ln n$.

On a à considérer l'expression

$$\frac{n \ln u_n}{a u_{n+1}} - \frac{(n+1)l(n+1)}{a} - 1,$$

ou

$$\frac{1}{a} n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + \alpha' \right] - \frac{1}{a} n \ln \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{\eta}{n^2} \right] - 1,$$

ou encore

$$\frac{n \ln \alpha' - 1 - a}{a} - \frac{\eta}{a n^2}.$$

Si $\lim n \ln \alpha' > 1$, on peut donner à a une valeur assez petite pour que cette expression soit positive pour des valeurs suffisamment grandes de n ; donc la série proposée est convergente.

On voit que, quand cette règle permet de prononcer sur la convergence de la série, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que $n u_n$ tende vers zéro.

Je vais maintenant démontrer avec la même facilité les règles de M. Bertrand, d'une manière générale. Je supposerai connue la formule

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)l(n+1)l(n+1)l(n+1) \dots}{n \ln l \ln l \ln \dots} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln l \ln n} + \frac{1}{n \ln l \ln l \ln n} + \alpha, \end{aligned}$$

α étant tel que $nlnlnlnln \dots \alpha$ soit infiniment petit. Cette formule s'établit sans difficulté. Au reste, on en trouvera la démonstration dans le Mémoire de M. Bonnet.

Cela étant, je suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \dots + \frac{1}{nlnlnlnln \dots} + \alpha},$$

α étant tel que $nlnlnlnlnlnln \dots \alpha$ ait une limite finie différente de zéro.

Alors, comme on l'a vu plus haut, u_n tend vers zéro.

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)l(n+1) \dots lln(n+1)}{nlnln \dots lln} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{nln \dots lln} + \frac{\varepsilon}{nln \dots lln}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \dots + \frac{1}{nlnlnlnln} + \alpha} \\ &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{nln \dots lln} - \alpha \right) + \frac{\varepsilon}{nln \dots lln}}{1 + \frac{1}{n} + \dots}. \end{aligned}$$

On en conclut comme ci-dessus, que si

$$\frac{1}{nln \dots lln} - \alpha < 0,$$

c'est-à-dire si

$$\lim nln \dots lln \dots \alpha > 1,$$

le deuxième terme du rapport étant négatif, et étant le terme général d'une série divergente,

$nln \dots lln \dots u_n$ tend vers zéro.

Si

$$\lim nln \dots lln \dots \alpha < 1,$$

$nln \dots lln \dots u_n$ croît indéfiniment.

Comme la série dont le terme général est $\frac{1}{nln \dots lln \dots u_n}$ est divergente, le premier cas est le seul où la série proposée puisse être convergente.

J'applique maintenant le lemme II en prenant pour $\varphi(n)$ le produit $n \ln \ln \dots \ln n$. J'ai ainsi l'expression

$$\frac{n \ln \dots \ln n \dots}{a} \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{(n+1) \ln(n+1) \dots \ln(n+1) \dots}{a} - 1$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{n \ln \dots \ln n \dots}{a} \left(1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n \ln \dots \ln n} + \alpha \right) \\ & - \frac{n \ln \dots \ln n \dots}{a} \left(1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n \ln \dots \ln n} + \frac{\varepsilon}{n \ln \dots \ln n} \right) - 1 \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$\frac{1}{a} [-1 + n \ln \dots \ln n \dots \alpha] - 1 - \frac{\varepsilon}{a n \ln \dots \ln n \dots}$$

Or quand

$$\lim n \ln \dots \ln n \dots \alpha > 1,$$

on peut prendre a assez petit pour que cette expression soit positive quand n est infini. Donc la série proposée est convergente.

On voit que dans tous les cas où cette série de règles permet de décider la question de la convergence ou de la divergence d'une série, on peut énoncer ce théorème :

Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \dots \ln n \dots u_n, \text{ tende vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n}.$$

Et même, si l'on savait d'avance combien d'essais il faudra faire pour arriver au résultat, c'est-à-dire si l'on savait combien de termes a le dénominateur de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \dots + \alpha},$$

on pourrait limiter le nombre des facteurs du critérium.

Si par exemple le dernier terme avant α était

$$\frac{1}{n \ln \ln \ln n},$$

il suffirait de constater que

$$n \ln \ln \ln \ln \ln u_n \text{ tend ou ne tend pas vers zéro.}$$

Remarquons que pour une classe particulière de séries, le critérium pourrait encore se simplifier; c'est ce qui nous est arrivé pour la règle de Gauss. Cette règle est comprise dans les deux premières de la série de règles que nous venons d'établir; de sorte que si le rapport de u_{n+1} à u_n a la forme que Gauss a étudiée, pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que $n \ln u_n$ tende vers zéro. Une étude directe nous a conduit à un résultat plus simple, car nous avons vu qu'il faut et il suffit que nu_n tende vers zéro. On conçoit que de pareilles simplifications puissent se reproduire pour d'autres catégories de fonctions.

M. Bonnet a donné une série de règles qui ne diffèrent pas des précédentes. Il suppose que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit de la forme

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} - \dots - \frac{1}{n \ln \dots \ln n} - \alpha.$$

Alors si $\lim \alpha n \ln \dots \ln n$ a une limite > 1 la série est convergente; si cette limite est moindre que 1, la série est divergente.

Je ne reprendrai pas la démonstration de ces règles; il est clair que la méthode que j'ai indiquée s'y applique absolument de la même manière, de sorte que nous arriverions encore à formuler la même conclusion :

Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \ln \dots \ln u_n \text{ tende vers zéro avec } \frac{1}{n}.$$

Encore une remarque: ces règles supposent que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour des valeurs très-grandes de n , soit toujours > 1 ou toujours < 1 ; elles ne s'appliqueraient pas si ce rapport oscillait indéfiniment autour de 1. La méthode que j'ai exposée pour l'étude de la convergence des séries pourrait encore être de quelque utilité. Il faudrait remplacer le lemme I par les théorèmes relatifs à la convergence d'un produit infini de facteurs binômes, dont les seconds termes ne sont ni tous positifs, ni tous négatifs.

M. Bertrand a montré la coïncidence entre les règles que je viens d'établir, celles qu'ils a déduites de la règle de Cauchy et celles de

M. de Morgan. Cette vérification se fait de la façon la plus simple; elle suffit pour nous permettre d'étendre le résultat auquel nous sommes parvenu à ces deux sortes de règles. Dans ces divers cas encore, pour que la série proposée soit convergente, il faut et il suffit que

$$n \ln \ln \dots u_n \text{ tende vers zéro.}$$

Autres règles de M. Bonnet.

M. Bonnet a donné encore deux séries de règles dont l'examen va nous conduire au même résultat.

Pour la première, cette remarque a déjà été faite par M. Bonnet dans son Mémoire : une série est convergente quand le produit

$$n \ln \dots \ln \ln (l \ln l)^{1+i} u_n$$

n'est pas infini pour de très-grandes valeurs de n . Il est bien clair que, si une série est divergente, et que le produit

$$n \ln \ln \dots u_n$$

tende vers zéro, si grand que soit le nombre des facteurs, cette règle ne pourra rien nous apprendre.

La démonstration de cette règle est intuitive, car on aura

$$u_n < \frac{1}{n \ln \ln \ln (l \ln l)^{1+i}},$$

qui est le terme général d'une série convergente

Cette règle est un peu plus étendue que celle de M. Bertrand, car elle pourrait être applicable sans que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fût toujours > 1 , ou toujours < 1 . Car si l'on a

$$u_n = \frac{a}{n \ln \dots (l \ln l)^{1+i}},$$

$$u_{n+1} = \frac{a + \alpha}{(n+1) \dots (l \ln l + 1)^{1+i}}.$$

D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a + \alpha}{a} \frac{(n+1) \dots (l \ln l + 1)^{1+i}}{n \ln \dots (l \ln l)^{1+i}}.$$

Or le second facteur est égal à

$$1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n \ln \dots llln},$$

il est donc plus grand que 1, mais le premier peut être alternativement plus grand ou plus petit que l'unité.

M. Bonnet a donné une autre série de règles qui reviennent à celles que M. Bertrand a déduites de la règle de M. Duhamel. Il suppose que l'on ait

$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{\ln}{n} - \frac{lln}{n} - r^n,$$

et que $\frac{n r^n}{llln}$ ait une limite. Si cette limite est plus grande que 1, la série est convergente; si la limite est moindre que 1, la série est divergente. On trouvera, dans son Mémoire déjà cité, la démonstration de ces règles; elle est fondée sur ce que

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n \ln (lln)^k}} = 1 - \frac{\ln}{n} - \frac{lln}{n} - \frac{k llln}{n} - \omega \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

On aura donc

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln (lln)^k}} + \omega \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Si k est > 1 , la série est convergente; on voit qu'alors

$$\sqrt[n]{n \ln lln u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(lln)^{k-1}}} + \omega \sqrt[n]{n \ln lln} \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Donc

$$n \ln lln u_n = \frac{1}{(lln)^{k-1}} + \dots,$$

expression qui tend vers zéro.

Si k est < 1 la série est divergente, et $n \ln lln u_n$ ne tend pas vers zéro, car

$$\sqrt[n]{n \ln lln u_n} = \sqrt[n]{(lln)^{1-k}} + \omega \sqrt[n]{n \ln lln} \left(\frac{\ln}{n} \right)^2.$$

Donc encore, ces règles de M. Bonnet ne permettront pas de démontrer la divergence d'une série qui serait divergente, bien que $n \ln lln \dots u_n$ tende vers zéro.

Pour terminer cette Note, je vais revenir sur le théorème général de Cauchy relativement aux séries de termes positifs décroissants. Soit une série

$$f(a), f(a+1), f(a+2), \dots$$

Désignons par $\varphi(a)$ la somme de cette série. L'aire comprise entre la courbe $y=f(x)$, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x=a$, et l'axe des x , est

$$\int_a^\infty f(x)dx;$$

cette somme d'éléments est évidemment égale à

$$\int_a^{a+1} \varphi(x)dx,$$

en supposant seulement que $\varphi(x)$ ait une valeur finie entre a et $a+1$. On aura donc

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^{a+1} \varphi(x)dx.$$

Cette égalité a lieu non-seulement pour une série de termes positifs, mais encore pour une série quelconque. Cela étant, dans tous les cas où $\varphi(a)$ étant infini, $\varphi(x)$ le serait également pour toutes les valeurs de x comprises entre a et $a+1$, on peut énoncer ce théorème : la série proposée est convergente ou divergente en même temps que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$. Cette condition est évidemment satisfaite quand on a une série de termes positifs décroissants, car la différence entre $\varphi(x)$ et $\varphi(a+1)$ est $< f(x)$, x étant compris entre a et $a+1$.

SUR

L'ANALYSE DES COURBES

RAPPORTÉES

A UN SYSTÈME QUELCONQUE DE COORDONNÉES,

PAR M. L'ABBÉ Aoust.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on rapporte une courbe à un système quelconque de coordonnées curvilignes, les divers éléments de la courbe s'expriment en fonction des éléments analogues des lignes coordonnées. Les expressions que l'on obtient, qui sont toujours symétriques, sont susceptibles d'une forme simple lorsqu'on introduit la *courbure inclinée*, et alors elles constituent des théorèmes intéressants de géométrie curviligne. Le but de ce Mémoire est d'exposer les principales de ces expressions, et de montrer que, dans cette théorie comme dans la théorie des lignes tracées sur une surface quelconque, la courbure inclinée est un des plus puissants éléments de démonstration et de condensation.

Nous conservons les notations, définitions et hypothèses de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, 1^{re} Partie, p. 2 et 3. Le signe \sum placé devant une expression indique la somme des expressions semblables obtenues par les permutations circulaires des indices 0, 1, 2; lorsqu'une

lettre placée sous le signe \sum , ou un indice, restent invariables, nous plaçons cette lettre ou cet indice entre deux petits crochets []. Nous représentons par d_0, d_1, d_2 les différentielles par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 toutes les fois que cette notation est nécessaire pour déterminer le sens des différentiations; la lettre d représente une différentielle totale, de telle sorte que l'on a $d = d_0 + d_1 + d_2$. Nous partageons ce Mémoire en deux Parties, la première relative aux Formules générales, la seconde aux Applications.

§ I. — Formules générales.

1. *Équations de la courbe en coordonnées curvilignes.* — Supposons qu'un point quelconque de l'espace soit déterminé par l'intersection de trois surfaces dont les équations dans le système rectiligne orthogonal sont

$$(1) \quad f(x, y, z) = \rho, \quad f_1(x, y, z) = \rho_1, \quad f_2(x, y, z) = \rho_2,$$

ρ, ρ_1, ρ_2 étant des paramètres qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles; à chaque point de l'espace correspondra un système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 , de sorte que ce système représentera les coordonnées du point. Si les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 sont des fonctions ψ, ψ_1, ψ_2 d'une variable t , lorsque t variera d'une manière continue, les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 varieront d'une manière continue; donc le lieu des intersections de ces surfaces sera une courbe dont les équations dans le système de coordonnées dont il s'agit seront

$$(2) \quad \rho = \psi(t), \quad \rho_1 = \psi_1(t), \quad \rho_2 = \psi_2(t);$$

si l'un des paramètres, ρ par exemple, est constant, la courbe sera située sur la surface ρ .

Supposons que les équations (1) soient résolues par rapport à x, y, z de telle sorte que l'on ait

$$x = F(\rho, \rho_1, \rho_2), \quad y = F_1(\rho, \rho_1, \rho_2), \quad z = F_2(\rho, \rho_1, \rho_2);$$

en remplaçant dans ces équations ρ, ρ_1, ρ_2 par leurs valeurs en fonction de t tirées des relations (2), on aura les trois équations de la courbe

dans le système rectiligne orthogonal. Cette courbe sera plus spécialement appelée *trajectoire* parce qu'elle traverse le système des coordonnées curvilignes.

2. *De l'élément de la trajectoire.* — Soit ds l'élément d'arc de la trajectoire, $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ seront ses trois composantes obliques suivant les arcs coordonnés au point que l'on considère; si l'on appelle dq , dq_1 , dq_2 les composantes obliques de l'élément ds suivant les plans tangents aux surfaces ρ , ρ_1 , ρ_2 , on peut se proposer de déterminer ces divers éléments en grandeur et en direction; ils se déduisent d'une formule unique qui donne l'angle de deux droites dans le système oblique.

Angle de deux droites. — Soient \mathcal{G} , \mathcal{G}' deux longueurs; g_0 , g_1 , g_2 ; g'_0 , g'_1 , g'_2 leurs composantes obliques suivant les arcs coordonnés; G_0 , G_1 , G_2 ; G'_0 , G'_1 , G'_2 les projections orthogonales des deux lignes sur les directions des mêmes arcs coordonnés, le principe des projections donne immédiatement les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{G} \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g_0 \cos(\mathcal{G}', d\sigma), & \mathcal{G}' \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g'_0 \cos(\mathcal{G}, d\sigma), \\ \mathcal{G} \mathcal{G}' \cos(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \Sigma g_0 G'_0 = \Sigma g'_0 G_0. \end{cases}$$

D'après ces relations, on a les expressions suivantes

$$(4) \quad \begin{cases} ds \cos(ds, d\sigma) = \Sigma d\sigma \cos([d\sigma], d\sigma), & ds = \Sigma d\sigma \cos(d\sigma, ds), \\ ds^2 = \Sigma d\sigma^2 + 2 \Sigma d\sigma_1 d\sigma_2 \cos \varphi; \end{cases}$$

on obtient aussi les formules suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} dq \cos(dq, d\sigma_1) = d\sigma_1 + d\sigma_2 \cos \varphi, & dq \cos(dq, d\sigma_2) = d\sigma_2 + d\sigma_1 \cos \varphi, \\ dq \cos(dq, d\sigma) = d\sigma_1 \cos \varphi_1 + d\sigma_2 \cos \varphi_2, & (3); \end{cases}$$

ces relations font connaître les éléments ds , dq , dq_1 , dq_2 , ainsi que leurs directions par rapport aux trois arcs coordonnés.

On en déduit facilement la formule suivante :

$$ds^2 = \Sigma (dq^2 - d\sigma^2),$$

laquelle montre que si l'on construit deux parallélépipèdes droits et rectangles, le premier sur les éléments dq , dq_1 , dq_2 , comme arêtes issues d'un même point, le second sur les éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, la diagonale

du premier est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont la diagonale du second et l'élément ds de la trajectoire.

3. *De la variation d'une fonction des coordonnées du point suivant l'élément de la trajectoire.* — Soit V une fonction quelconque de ρ, ρ_1, ρ_2 , l'on a pour la variation première de cette fonction, la relation

$$\frac{dV}{ds} = \sum \frac{dV}{d\rho} \frac{d\rho}{ds},$$

et pour la variation du second ordre de la même fonction, la relation

$$(6) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dV}{ds} \right) = \sum \frac{dV}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) + \frac{d^2V}{ds^2},$$

dans laquelle la variation complète du second ordre d^2V , est donnée par l'équation symbolique

$$d^2V = \left(d\rho \frac{d}{d\rho} + d\rho_1 \frac{d}{d\rho_1} + d\rho_2 \frac{d}{d\rho_2} \right)^2 V.$$

La relation (6) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(6') \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dV}{ds} \right) = \frac{d^2V}{ds^2} + \sum \frac{dV}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) - \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right).$$

Or, si l'on a égard aux expressions des variations des arcs coordonnés données par les formules (20'') de notre *Théorie des coordonnées curvilignes*, la dernière somme contenue dans l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \\ &= \sum \frac{d_0V}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right)}{\frac{d\sigma^2}{d\rho^2}} \frac{d\sigma}{ds} + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{01}^{(0)}} \right) \frac{d\sigma_1}{ds} + \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(0)}} \right) \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Soit, en second lieu, une fonction U de x, y, z , on trouve pour la variation du premier ordre la relation

$$(x) \quad \frac{dU}{ds} = \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds}.$$

Or, on a l'équation

$$\frac{dU}{d\sigma} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{d\sigma} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{d\sigma},$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$K = \frac{dU}{dx^2} + \frac{dU}{dy^2} + \frac{dU}{dz^2},$$

la valeur de $\frac{dU}{d\sigma}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dU}{d\sigma} = K \cos(K, d\sigma);$$

conséquemment, en s'appuyant sur les formules (3), on obtient la relation

$$(\alpha') \quad \frac{dU}{ds} = K \cos(K, ds).$$

On trouvera pour la variation du second ordre de U, l'expression

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{dU}{ds} \right) &= \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \left[\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) = K \frac{\cos(K, \mathfrak{R})}{\mathfrak{R}} + \frac{d^2U}{d\sigma^2} \quad (3),$$

$$\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{dU}{d\sigma} \right) = K \frac{\cos(K, \mathfrak{L}_{01})}{\mathfrak{L}_{01}} + \frac{d^2U}{d\sigma d\sigma_1} \quad (6);$$

en ayant égard à ces valeurs, on obtient l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left(\frac{dU}{ds} \right) \\ &= \frac{d^2U}{ds^2} + \sum \frac{dU}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ K \sum \left\{ \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\cos(K, \mathfrak{R})}{\mathfrak{R}} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\cos(K, \mathfrak{L}_{01})}{\mathfrak{L}_{01}} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(K, \mathfrak{L}_{02})}{\mathfrak{L}_{02}} \frac{d\sigma_2}{ds} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle d^2U est la différentielle complète de U par rapport à x, y, z .

4. *De la courbure de la trajectoire et de ses composantes orthogonales suivant une direction donnée.* — Soit $\frac{1}{\varrho}$ la courbure de la trajectoire ds ; si dans la formule (7) on fait $U = x$, le premier membre de cette formule a pour valeur la composante de la courbure suivant l'axe des x , et si de plus on remarque que la différentielle seconde de x est nulle, on obtient l'équation

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(\varrho, x)}{\varrho} \\ &= \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \frac{d\sigma}{ds} \left[\frac{\cos(\mathfrak{A}, x)}{\mathfrak{A}} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\cos(x, \varrho_{01})}{\varrho_{01}} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(x, \varrho_{02})}{\varrho_{02}} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette équation donne la composante orthogonale de la courbure de la trajectoire ds suivant une direction quelconque ox . Si l'on fait coïncider la direction ox avec $d\sigma$, on aura la composante orthogonale de cette courbure suivant l'arc coordonné $d\sigma$; mais alors il faudra se rappeler que les cosinus des angles $(\mathfrak{A}, d\sigma)$, $(\varrho_{01}, d\sigma)$, $(\varrho_{02}, d\sigma)$ sont nuls, parce que l'arc $d\sigma$ est perpendiculaire aux rayons de courbure propre ou inclinée \mathfrak{A} , ϱ_{01} , ϱ_{02} . L'expression de cette composante est

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(\varrho, d\sigma)}{\varrho} \\ &= \sum \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \\ &+ \sum \left[\frac{\cos(\mathfrak{A}, [d\sigma])}{\mathfrak{A}} \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \frac{\cos(\varrho_{01}, [d\sigma])}{\varrho_{01}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{\cos(\varrho_{02}, [d\sigma])}{\varrho_{02}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \right]. \end{aligned} \right.$$

5. *Composantes obliques de la courbure de la trajectoire.* — Soient $\frac{1}{p^{(0)}}$, $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ les composantes obliques suivant les trois arcs coordonnés, de la courbure $\frac{1}{\varrho}$; si l'on remarque que la projection d'une courbure quelconque suivant l'axe des x est la somme des projections sur cet axe des trois composantes obliques, on aura, en représentant par X , X_1 , X_2 les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les trois arcs coordonnés

(*Théorie des Coordonnées curvilignes*, n° 13), les équations suivantes :

$$\frac{\cos(\mathcal{Q}, x)}{\mathcal{Q}} = \frac{X}{p^{(0)}} + \frac{X_1}{p^{(1)}} + \frac{X_2}{p^{(2)}}, \quad \frac{\cos(\mathcal{R}, x)}{\mathcal{R}} = \frac{X}{r^{(0)}} + \frac{X_1}{r^{(1)}} + \frac{X_2}{r^{(2)}}, \dots,$$

et ainsi de suite. En portant les valeurs des composantes de ces courbures et des courbures analogues dans l'équation (8), et en identifiant les coefficients de X, X_1, X_2 , on aura l'équation suivante :

$$(9) \quad \frac{1}{p^{(0)}} = \sum \frac{1}{r^{(0)}} \frac{d\sigma^2}{ds^2} + \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{1}{l_{11}^{(0)}} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) \quad (3),$$

dans laquelle le signe \sum s'étend à tous les indices inférieurs.

Remarquons que $\frac{1}{p^{(0)}}$ ne renferme que trois sortes de termes : 1° la somme des termes qui ne dépendent que des composantes obliques des courbures propres des lignes coordonnées; 2° la somme des termes qui ne dépendent que des composantes obliques des courbures inclinées des lignes coordonnées; 3° le terme $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$.

6. *Nouvelles expressions des composantes obliques de la courbure de la trajectoire.* — Nous allons maintenant calculer d'autres expressions de la composante $\frac{1}{p^{(0)}}$ qui nous paraissent dignes d'être remarquées.

2° *Expression.* — Observons que l'on a $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d\rho}{ds}$; si l'on différencie les deux membres par rapport à ds , on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) &= \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \\ &+ \frac{d\rho}{ds} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{ds} + \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho_1}{ds} + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho_2}{ds} \right] \quad (3); \end{aligned}$$

or, si l'on a égard aux variations des arcs données par les formules (20'') de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, on obtient l'équation

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p^{(0)}} &= \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) + \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} \\ &+ 2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \frac{1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \frac{1}{l_{12}^{(0)}} + \frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{l_{10}^{(0)}} \right) + \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2}. \end{aligned} \right.$$

3^e Expression. — Si dans le développement de la dérivée $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$ écrit au commencement de ce numéro, on ajoute et on retranche les trois derniers termes de ce développement, la somme des termes additifs représentera l'expression

$$\frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right);$$

on aura donc, en ayant égard aux variations des arcs (*Théorie des Coordonnées curvilignes*, formules 20'') la relation suivante

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) = \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right) - \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} - \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{11}^{(0)}} \right) - \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds} \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{21}^{(0)}} \right),$$

et, en portant cette valeur de $\frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)$ dans l'équation (9), on trouve la formule

$$(9'') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{p^{(0)}} &= \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2} + 2 \left(\frac{\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds}}{l_{10}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds}}{l_{12}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds}}{l_{21}^{(0)}} \right) \\ &\quad + \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma^2}{d\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right) - \frac{d\rho^2}{ds^2} \frac{d^2\sigma}{d\rho^2}. \end{aligned} \right.$$

4^e Expression. — Prenons la dérivée de $\frac{d\sigma}{ds}$ en ne faisant varier que ρ , nous obtiendrons les deux premiers termes de la seconde expression de $\frac{1}{p^{(0)}}$, cette seconde expression pourra donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{p^{(0)}} = \frac{d_0}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) + 2 \left(\frac{\frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds}}{l_{10}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_1}{ds} \frac{d\sigma_2}{ds}}{l_{12}^{(0)}} + \frac{\frac{d\sigma_2}{ds} \frac{d\sigma}{ds}}{l_{21}^{(0)}} \right) + \sum \frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2}.$$

7. Des projections obliques de l'arc de contingence de la trajectoire. — L'équation (9) multipliée par ds donne la relation suivante :

$$(10) \quad \frac{ds}{p^{(0)}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \left(\frac{d\sigma}{r^{(0)}} + \frac{d\sigma_1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{d\sigma_2}{l_{12}^{(0)}} \right) + d \left(\frac{d\sigma}{ds} \right),$$

le signe \sum s'étendant à tous les indices inférieurs. Cette formule fait connaître la projection oblique de l'arc de contingence de la trajec-

toire ds en fonction des projections obliques des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées. On doit remarquer : 1° qu'elle ne contient que des projections obliques suivant $d\sigma$ des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées; 2° que le facteur de $\frac{d\sigma}{ds}$ sous le signe \sum renferme la somme des projections obliques des arcs de contingence propre ou inclinée qui sont perpendiculaires à $d\sigma$.

8. *Du plan de courbure de la trajectoire.* — Soit \mathfrak{x} la normale au plan de courbure de la trajectoire ds , l'on a

$$\cos(\mathfrak{x}, z) = \mathfrak{Q} \left[\frac{dx}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \right) - \frac{dy}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) \right];$$

si l'on porte dans le second membre les valeurs des dérivées de $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ données par la formule (α), on obtient

$$\frac{\cos(\mathfrak{x}, z)}{\mathfrak{Q}} = \sum \frac{1}{p^{(s)}} \left(\frac{d_s y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_s x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} \right).$$

Considérons le premier terme du second membre, en y remplaçant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs en fonction des rapports des arcs $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ à l'arc ds ; la valeur de ce premier terme est alors donnée par la relation

$$\frac{d_s y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_s x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} = \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{d_s y}{d\sigma} \frac{d_s x}{d\sigma_1} - \frac{d_s x}{d\sigma} \frac{d_s y}{d\sigma_1} \right) + \frac{d\sigma_2}{ds} \left(\frac{d_s y}{d\sigma} \frac{d_s x}{d\sigma_2} - \frac{d_s x}{d\sigma} \frac{d_s y}{d\sigma_2} \right);$$

on reconnaît que le coefficient de $\frac{d\sigma_1}{ds}$ dans le second membre représente le rapport de la projection de l'aire du parallélogramme des éléments $d\sigma$, $d\sigma_1$ sur le plan des xy au produit de ces éléments, et que par conséquent ce rapport est égal à $\sin \varphi_1 \cos(n_1, z)$. De même le coefficient de $\frac{d\sigma_2}{ds}$ est égal à $-\sin \varphi_2 \cos(n_2, z)$; on aura donc la relation

$$\frac{d_s y}{d\sigma} \frac{dx}{ds} - \frac{d_s x}{d\sigma} \frac{dy}{ds} = \frac{d\sigma_1}{ds} \sin \varphi_1 \cos(n_1, z) - \frac{d\sigma_2}{ds} \sin \varphi_2 \cos(n_2, z),$$

qui donne l'expression du coefficient de $\frac{1}{p^{(a)}}$; les coefficients de $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ se déduisent de la relation précédente par la rotation des indices. On a donc finalement l'équation

$$\frac{\cos(\mathfrak{K}, z)}{\mathfrak{K}} = \sum \left(\frac{d\sigma_2}{p^{(1)} ds} - \frac{d\sigma_1}{p^{(2)} ds} \right) \sin \varphi \cos(n, z),$$

le signe \sum s'étendant à tous les indices inférieurs.

Cette équation fait connaître les angles que la normale \mathfrak{K} au plan de courbure de la trajectoire fait avec une direction quelconque oz .

Si l'on remplace la direction oz par la direction $d\sigma$, et qu'on remarque que les angles $(n_2, d\sigma)$, $(n_1, d\sigma)$ sont droits, on obtient la relation

$$\frac{\cos(\mathfrak{K}, d\sigma)}{\mathfrak{K}} = \left(\frac{d\sigma_2}{p^{(1)} ds} - \frac{d\sigma_1}{p^{(2)} ds} \right) \sin \varphi \cos(n, d\sigma) \quad (3),$$

dans laquelle il faut remplacer $\cos(n, d\sigma)$ par $\sin \varphi$, $\sin \theta_2$ qui lui est égal et les composantes $\frac{1}{p^{(1)}}$, $\frac{1}{p^{(2)}}$ par leurs valeurs données par les équations (9).

9. *De la courbure inclinée de la trajectoire ds suivant une direction donnée.* — Cherchons en premier lieu la courbure inclinée de la trajectoire suivant l'un des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, et appelons ces courbures inclinées $\frac{1}{\Lambda_0}$, $\frac{1}{\Lambda_1}$, $\frac{1}{\Lambda_2}$. Nous remarquerons que, conformément à notre notation, une courbure propre $\frac{1}{\mathfrak{K}}$ d'un arc coordonné $d\sigma$ peut aussi s'écrire sous la forme $\frac{1}{\mathfrak{K}_0}$, puisque cette courbure propre n'est autre chose que la courbure inclinée de l'arc $d\sigma$ suivant la direction $d\sigma$. Cela posé, en se rappelant que X est égal à $\frac{dx}{d\sigma}$ (n° 5), l'on a la relation

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{dX}{d\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{dX}{d\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds},$$

et conséquemment

$$(13) \quad \frac{\cos(\Lambda_0, x)}{\Lambda_0} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\mathfrak{K}_{[a]}, x)}{\mathfrak{K}_{[a]}}.$$

Cette formule fait connaître la projection d'une courbure inclinée $\frac{1}{\Lambda_s}$ de l'arc ds sur une direction quelconque ox . Si cette direction coïncide avec l'un des arcs coordonnés $d\sigma$, on a la formule

$$(13') \quad \frac{\cos(\Lambda_s, d\sigma)}{\Lambda_s} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\xi_{[0]}, [d\sigma])}{\xi_{[0]}} \quad (3).$$

On déduit de la formule (13), par les procédés connus, les composantes obliques de cette même courbure suivant les arcs coordonnés, de sorte que, si l'on représente par $\frac{1}{\Lambda_s^{(0)}}$, $\frac{1}{\Lambda_s^{(1)}}$, $\frac{1}{\Lambda_s^{(2)}}$ ces trois composantes, on obtient la relation

$$(14) \quad \frac{1}{\Lambda_s^{(0)}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\ell_{[0]}^{(0)}}.$$

On obtient aussi, en s'appuyant sur les formules (3), la relation

$$(14') \quad \frac{\cos(\Lambda_s, ds)}{\Lambda_s} = \sum \frac{\cos(d\sigma, ds)}{\Lambda_s^{(0)}} \quad (3),$$

dans laquelle les composantes obliques de la courbure $\frac{1}{\Lambda_s}$ doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (14).

Cherchons en second lieu la courbure inclinée de la trajectoire suivant une direction ν quelconque. Soit $\frac{1}{\Lambda_\nu}$ cette courbure, et représentons, d'après notre notation, par $\frac{1}{\Lambda_\nu^{(0)}}$, $\frac{1}{\Lambda_\nu^{(1)}}$, $\frac{1}{\Lambda_\nu^{(2)}}$ les courbures inclinées des arcs coordonnés $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, suivant la même direction ν : l'on a évidemment la formule

$$\frac{d \cos(\nu, x)}{ds} = \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{ds} + \frac{d \cos(\nu, x)}{d\sigma_2} \frac{d\sigma_2}{ds},$$

laquelle donne

$$(15) \quad \frac{\cos(\Lambda_\nu, x)}{\Lambda_\nu} = \sum \frac{d\sigma_i}{ds} \frac{\cos(\Lambda_{\nu_i}, x)}{\Lambda_{\nu_i}}.$$

Or, si ν est une longueur déterminée en grandeur et en direction, et que $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$ soient ses trois composantes obliques suivant les arcs coordonnés, l'on a

$$\cos(\nu, x) = \sum \frac{\nu^{(i)}}{\nu} \cos(x, d\sigma).$$

La différentiation par rapport à $d\sigma$ donne

$$\frac{\cos(\Lambda_{\tau}, x)}{\Lambda_{\tau_0}} = \sum \frac{\tau^{(0)}}{\tau} \frac{\cos(\xi_{[\sigma]_0}, x)}{\xi_{[\sigma]_0}} + \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right),$$

laquelle donne la composante orthogonale de la courbure $\frac{1}{\Lambda_{\tau}}$ suivant une direction quelconque.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (15), on obtient la formule

$$(15') \quad \frac{\cos(\Lambda_{\tau}, x)}{\Lambda_{\tau}} = \sum \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \frac{\cos(\Lambda_0, x)}{\Lambda_0} + \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right).$$

Représentons par $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(0)}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(1)}}$, $\frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(2)}}$ les composantes obliques de la courbure $\frac{1}{\Lambda_{\tau}}$ suivant les arcs coordonnés, on obtient, par le procédé déjà indiqué n° 5, la formule simple

$$(16) \quad \frac{1}{\Lambda_{\tau}^{(0)}} = \sum \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \frac{1}{\Lambda_0^{(0)}} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau^{(0)}}{\tau} \right) \quad (3),$$

dans laquelle les composantes telles que $\frac{1}{\Lambda_0^{(0)}}$ doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (14).

On déduit sans difficulté les deux relations

$$(15'') \quad \frac{\cos(\Lambda_{\tau}, d\sigma)}{\Lambda_{\tau}} = \sum \frac{\cos([d\sigma], d\sigma)}{\Lambda_0^{(0)}}, \quad \frac{\cos(\Lambda_{\tau}, ds)}{\Lambda_{\tau}} = \sum \frac{\cos(ds, d\sigma)}{\Lambda_0^{(0)}} \quad (3).$$

Ces formules sont très-générales, elles renferment implicitement toutes celles qui ont été trouvées dans les numéros précédents. Si l'on suppose, par exemple, que la longueur τ coïncide en grandeur et en direction avec ds , comme la courbure inclinée de l'arc ds suivant la direction ds n'est pas distincte de la courbure propre $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ de la trajectoire, la première des formules (15''), combinée avec les formules (16) et (14'), donne l'équation

$$(8') \quad \frac{\cos(\mathfrak{P}, d\sigma)}{\mathfrak{P}} = \sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\Lambda_0, [d\sigma])}{\Lambda_0} + \sum \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right),$$

qui est évidemment la même que notre formule (8'), lorsqu'on a égard aux formules (13).

10. *De la variation des angles des lignes coordonnées suivant l'élément ds .* — Nous avons trouvé, dans notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, formules (14) et (15), les relations suivantes :

$$\begin{aligned} -\sin\varphi d_1\varphi &= \frac{d\sigma_1}{\mathcal{L}_{21}} \cos(\mathcal{L}_{21}, d\sigma_1) + \frac{d\sigma_1}{\mathcal{R}_1} \cos(\mathcal{R}_1, d\sigma_2), \\ -\sin\varphi d_2\varphi &= \frac{d\sigma_2}{\mathcal{L}_{12}} \cos(\mathcal{L}_{12}, d\sigma_2) + \frac{d\sigma_2}{\mathcal{R}_2} \cos(\mathcal{R}_2, d\sigma_1), \\ -\sin\varphi d_3\varphi &= \frac{d\sigma}{\mathcal{L}_{23}} \cos(\mathcal{L}_{23}, d\sigma_1) + \frac{d\sigma}{\mathcal{L}_{13}} \cos(\mathcal{L}_{13}, d\sigma_2); \end{aligned}$$

si l'on ajoute ces trois formules membre à membre et qu'on ait égard aux relations (13'), on trouve, après avoir divisé le résultat par ds , la relation suivante :

$$(17) \quad -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos(\Lambda_2, d\sigma_1)}{\Lambda_2} + \frac{\cos(\Lambda_1, d\sigma_2)}{\Lambda_1} \quad (3),$$

qui est une des plus utiles de la théorie des courbes.

Si l'on représente par $\frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1}$ les projections orthogonales des courbures inclinées $\frac{1}{\Lambda_2}, \frac{1}{\Lambda_1}$ sur le plan tangent à la surface ρ , en remarquant que l'on a

$$\frac{\cos(\Lambda_2, d\sigma_1)}{\Lambda_2} = \frac{\sin\varphi}{\lambda_2}, \quad \frac{\cos(\Lambda_1, d\sigma_2)}{\Lambda_1} = \frac{\sin\varphi}{\lambda_1},$$

l'équation précédente prend la forme suivante :

$$(17') \quad -\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \quad (3).$$

Ces formules permettront de calculer les variations suivant ds d'une fonction quelconque des angles $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ des lignes coordonnées.

11. *Formules de transformation.* — Nous allons démontrer quelques formules de transformation pour passer d'un système de coordonnées à un autre système. Écrivons les deux types d'équations que nous avons

trouvés dans la *Théorie des Coordonnées curvilignes*, n° 4 :

$$(18) \quad \frac{d\rho}{dx} = \sum h_{[i]} h_i \cos([n], n) \frac{dx}{d\rho}, \quad \frac{dx}{d\rho} = \sum H_{[i]} H_i \cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d\rho}{dx} \quad (3),$$

dans lesquelles n, n_1, n_2 sont les directions des normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 .

Soit maintenant une fonction U de x, y, z , l'on a

$$(\beta) \quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dU}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dU}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx};$$

or, si l'on porte dans cette équation les valeurs de $\frac{d\rho}{dx}, \frac{d\rho_1}{dx}, \frac{d\rho_2}{dx}$ tirées de la première des équations (18), et qu'on pose, pour abréger,

$$(18') \quad U_i h = \sum [h] h \cos([n], n) \frac{dU}{d\rho},$$

on aura

$$\frac{dU}{dx} = \sum h U_i \frac{dx}{d\rho}.$$

Les trois équations contenues dans le type (18') sont en tout semblables aux trois équations contenues dans le premier des types (18); donc, en vertu des équations contenues dans le second des types (18), on aura directement et sans calcul les équations

$$(18'') \quad \frac{dU}{d\rho} = \sum [H] H \cos([d\sigma], d\sigma) U_i h \quad (3),$$

les paramètres H, h étant liés entre eux par la relation

$$H h = \frac{1}{\cos(n, d\sigma)} \quad (3),$$

que nous avons trouvée au n° 4 de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*.

Les équations (18') prouvent que U_0, U_1, U_2 peuvent être considérées comme les composantes orthogonales suivant les normales n, n_1, n_2 aux surfaces coordonnées de la force dont les composantes obliques, suivant ces mêmes normales, seraient $h \frac{dU}{d\rho}, h_1 \frac{dU}{d\rho_1}, h_2 \frac{dU}{d\rho_2}$.

Les équations (18'') prouvent que $\frac{dU}{H d\rho}, \frac{dU}{H_1 d\rho_1}, \frac{dU}{H_2 d\rho_2}$ sont les composantes orthogonales suivant les arcs coordonnés $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$ de la force dont les composantes obliques, suivant les mêmes arcs, seraient $HhU_0, H_1h_1U_1, H_2h_2U_2$.

Maintenant, si l'on remarque que, lorsqu'une force est décomposée suivant les directions $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, et qu'on prend les projections orthogonales de cette force sur les normales n, n_1, n_2 aux faces du parallélipède construit sur $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, les rapports des composantes obliques aux projections orthogonales correspondantes sont $\cos(n, d\sigma), \cos(n_1, d\sigma_1), \cos(n_2, d\sigma_2)$, et qu'il en est de même lorsqu'on opère d'une manière inverse, il en résulte que, ces conditions étant remplies dans les deux systèmes dont il vient d'être question, la résultante du premier système n'est pas distincte de la résultante du second. Cette conclusion est aussi rendue évidente par la manière dont on a obtenu les équations (18'), (18'').

Les formules (18), (18'), (18'') sont donc des formules de transformation pour passer d'un système de coordonnées rectilignes à un système de coordonnées curvilignes, et réciproquement.

§ II. — Applications des formules précédentes.

12. *Composantes obliques de la force accélératrice d'un corps qui se meut.* — Soient v la vitesse du mobile, u_0, u_1, u_2 ses composantes obliques suivant les trois arcs coordonnés, v_0, v_1, v_2 les composantes orthogonales de la vitesse suivant les mêmes arcs. Appelons M_0, M_1, M_2 les composantes obliques de la force accélératrice suivant les mêmes directions; si l'on appelle M_x la projection orthogonale de cette force sur l'axe des x , on a l'équation

$$(20) \quad M_x = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + \frac{v^2}{\varrho} \cos(\varphi, x),$$

dt étant l'élément du temps. Si l'on remarque que l'on a les relations

$$dx = \sum X_0 d\sigma, \quad \frac{\cos(\varphi, x)}{\varrho} = \sum \frac{X_0}{p^{(0)}}, \quad M_x = \sum M_0 X_0,$$

et qu'on porte ces valeurs dans l'équation (20), on aura, en identifiant les coefficients de X_0, X_1, X_2 , les équations suivantes :

$$(21) \quad M_0 = \frac{dv}{dt} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{v^2}{p^{(0)}}.$$

Si maintenant on a égard à la valeur de $\frac{ds^2}{dt^2} \frac{1}{p^{(0)}}$ donnée par l'équation (9) et que l'on pose les relations

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d\sigma}{dt} = u_0, \quad \frac{d\sigma_1}{dt} = u_1, \quad \frac{d\sigma_2}{dt} = u_2,$$

qui résultent de la définition de la vitesse et de ses composantes obliques, on obtient, après réductions,

$$(21') \quad M_0 = \frac{du_0}{dt} + \sum \left(\frac{u_0^2}{r^{(0)}} + \frac{u_0 u_1}{l_{11}^{(0)}} + \frac{u_0 u_2}{l_{21}^{(0)}} \right) \quad (3),$$

dans laquelle le signe \sum s'étend à tous les indices inférieurs.

Si l'on a égard aux équations (14), la relation précédente s'écrit sous la forme concise

$$M_0 = \frac{du_0}{dt} + \sum \frac{u_0 v}{\Lambda^{(0)}}.$$

En éliminant de l'équation (21) la courbure $\frac{1}{p^{(0)}}$, soit au moyen de l'équation (9'), soit au moyen de l'équation (9''), on trouve les deux nouvelles expressions suivantes de la composante M_0 :

$$(21'') \quad M_0 = \frac{du_0}{dt} + 2 \left(\frac{u u_2}{l_{20}^{(0)}} + \frac{u u_1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{u_1 u_2}{l_{12}^{(0)}} \right) + \sum \frac{u_0^2}{r^{(0)}} \quad (3),$$

$$(21''') \quad M_0 = \frac{\frac{d}{dt} \left(u_0 \frac{d\sigma}{d\rho} \right)}{\frac{d\sigma}{d\rho}} - \frac{d\rho^2}{dt^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) + 2 \left(\frac{u u_1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{u_1 u_2}{l_{12}^{(0)}} + \frac{u u_2}{l_{20}^{(0)}} \right) + \sum \frac{u_0^2}{r^{(0)}} \quad (3),$$

en se rappelant que deux composantes obliques telles que $\frac{1}{l_{11}^{(0)}}$, $\frac{1}{l_{21}^{(0)}}$ sont égales (*Théorie des Coordonnées curvilignes*, formule 32).

Composantes orthogonales de la force accélératrice suivant les arcs coordonnés. — Représentons par π_0, π_1, π_2 les composantes orthogonales

de la force accélératrice suivant $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, on a la relation

$$(22) \quad \mathfrak{M}_s = \sum M_s \cos([d\sigma], d\sigma) \quad (3);$$

or, si l'on porte dans le second membre les valeurs de M_0 , M_1 , M_2 tirées des équations (21'), et qu'on ait égard aux équations (13), on trouve l'équation

$$(22') \quad \mathfrak{M}_s = \sum \frac{du_s}{dt} \cos([d\sigma], d\sigma) + \sum \frac{u_s}{\Lambda_s} \cos(\Lambda_s, [d\sigma]) \quad (3),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_s = & \sum \frac{du_s}{dt} \cos([d\sigma], d\sigma) \\ & + \sum \left[\frac{u_s^2}{\mathfrak{A}} \cos(\mathfrak{A}, d\sigma) + \frac{u_s u_1}{\mathfrak{L}_{s1}} \cos(\mathfrak{L}_{s1}, [d\sigma]) + \frac{u_s u_2}{\mathfrak{L}_{s2}} \cos(\mathfrak{L}_{s2}, [d\sigma]) \right], \end{aligned}$$

le signe \sum s'étendant à tous les indices inférieurs. On trouverait sans difficulté les expressions des mêmes composantes relatives aux formules (21''), (21''').

Si l'on représente par \mathfrak{M} la force accélératrice elle-même, on a l'intensité de cette force par la relation

$$\mathfrak{M} = \sum M_s \cos(\mathfrak{M}, d\sigma).$$

13. Composante orthogonale de la force accélératrice suivant une direction quelconque ν . — Soient α , β , γ les angles que cette direction ν fait avec les axes x , y , z , on a l'équation

$$\mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, \nu) = \cos \alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \cos \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos \gamma \frac{d^2 z}{dt^2},$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante, S indiquant une somme s'étendant aux trois coordonnées x , y , z :

$$\mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, \nu) = S \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cos \alpha \right) - S \frac{dx}{dt} \frac{d \cos \alpha}{dt};$$

or, d'après notre notation,

$$\frac{v}{\Lambda_v} \cos(\Lambda_v, x) = \frac{d \cos x}{dt};$$

on a donc la relation

$$(23) \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, \iota) = \frac{d}{dt} [v \cos(\iota, ds)] - \frac{v^2}{\Lambda_v} \cos(\Lambda_v, ds).$$

Telle est l'expression de la composante orthogonale de la force accélératrice \mathfrak{N} suivant une direction quelconque ι . Cette expression tire sa simplicité de l'introduction de la courbure inclinée $\frac{1}{\Lambda_v}$.

Si la direction ι coïncide avec la direction d'un arc coordonné $d\sigma$, l'équation précédente devient

$$(23') \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, d\sigma) = \frac{d}{dt} [v \cos(d\sigma, ds)] - \frac{v^2}{\Delta_0} \cos(\Lambda_0, ds) \quad (3).$$

Il est bon de remarquer que, si l'on représente par ι' la position infiniment voisine de ι , la formule (23) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(23'') \quad \mathfrak{N} \cos(\mathfrak{N}, \iota) = \frac{d}{dt} [v \cos(\iota, ds)] - \frac{v(\iota, \iota')}{dt} \cos(\Lambda_v, ds).$$

Il faut porter dans ces différentes formules les expressions des courbures inclinées de l'arc ds suivant les directions ι ou $d\sigma$, expressions données par les relations (15) et (14).

Appliquons ces formules au système polaire dans lequel le rayon vecteur est τ , l'angle qu'il forme avec l'axe est ψ , et l'angle que la projection du rayon vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe forme avec une droite fixe située dans ce plan est θ .

D'après cela, l'on a

$$d\sigma = d\tau, \quad d\sigma_1 = \tau \sin \psi d\theta, \quad d\sigma_2 = \tau d\psi.$$

La formule (23'), appliquée successivement aux directions de ces

trois arcs coordonnés, donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, d\sigma) &= \frac{d\tau}{dt} - \frac{\tau^2 \sin^2 \psi \frac{d\theta^2}{dt^2} + \tau^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}}{dt^2}, \\ \mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, d\sigma_1) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tau \sin \psi \frac{d\theta}{dt}}{dt} \right) + \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{\sin \psi \frac{d\tau}{dt} - \tau \cos \psi \frac{d\psi}{dt}}{dt} \right), \\ \mathfrak{M} \cos(\mathfrak{M}, d\sigma_2) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\tau \frac{d\psi}{dt}}{dt} \right); \end{aligned}$$

lesquels coïncident avec ceux que l'on obtient par les formules de la dynamique.

14. *Formules de Lagrange.* — Nous allons maintenant démontrer l'identité de notre formule (23) avec les formules de dynamique données par Lagrange relatives au mouvement d'un point. Si l'on pose, comme fait ce géomètre, $T = \frac{1}{2} v^2$, on aura

$$2T = \sum u_i^2 + 2 \sum u_i u_j \cos \varphi_{ij};$$

or, si l'on représente par Φ la fonction des forces, la formule du mouvement due à Lagrange est, en représentant par ρ', ρ'_1, ρ'_2 les dérivées de ρ, ρ_1, ρ_2 par rapport au temps

$$(25) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\rho'} \right) - \frac{dT}{d\rho} = \frac{d\Phi}{d\rho}.$$

Cela posé, l'on a

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\rho'} &= \frac{d\sigma}{d\rho} (u_0 + u_1 \cos \varphi_{01} + u_2 \cos \varphi_{02}) = \frac{d\sigma}{d\rho} v_0, \\ \frac{dT}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) \frac{d\rho}{dt} v_0 + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} \right) \frac{d\rho_1}{dt} v_1 + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2} \right) \frac{d\rho_2}{dt} v_2 - \sum u_i u_j \sin \varphi_{ij} \frac{d\varphi_{ij}}{d\rho}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (25), on trouve

$$\frac{d}{dt} \left(v_0 \frac{d\sigma}{d\rho} \right) - \sum v_i \frac{d\rho}{dt} \frac{d}{d[\rho]} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) + \sum \frac{d\sigma_i}{dt} \frac{d\sigma_i}{dt} \sin \varphi_{ij} \frac{d\varphi_{ij}}{d[\rho]} = \frac{d\Phi}{d\rho};$$

or, si l'on développe le premier terme, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\rho} \frac{dv_1}{dt} + \frac{d\rho_1}{dt} \left[v_1 \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) - v_1 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_1}{d\rho_1} \right) \right] \\ + \frac{d\rho_2}{dt} \left[v_2 \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{d\sigma}{d\rho} \right) - v_2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\sigma_2}{d\rho_2} \right) \right] \\ + \sum \frac{d\sigma_1}{dt} \frac{d\sigma_2}{dt} \sin \varphi \frac{d\varphi}{d[\rho]} = \frac{d\Phi}{d\rho}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation les variations des arcs par leurs valeurs tirées des expressions (20'') de notre *Théorie des Coordonnées curvilignes*, on trouve, en ordonnant, par rapport aux composantes obliques des vitesses, la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} + u_1^2 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{11}^{(0)}} \right) \cos \varphi_1 + \left(\frac{1}{l_{11}^{(1)}} - \frac{1}{l_{11}^{(1)}} \right) \right] \\ + u_2^2 \left[\left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{22}^{(0)}} \right) \cos \varphi_2 + \left(\frac{1}{l_{22}^{(2)}} - \frac{1}{l_{22}^{(2)}} \right) \right] \\ + u_1 u_2 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}} - \frac{1}{l_{11}^{(1)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{1}{l_{22}^{(2)}} \right) \cos \varphi + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{11}^{(0)}} \right) \cos \varphi_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{22}^{(0)}} \right) \cos \varphi_2 + \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] \\ + u u_1 \left[\left(\frac{1}{l_{10}^{(1)}} - \frac{1}{l_{11}^{(1)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} - \frac{1}{l_{11}^{(0)}} \right) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\sigma} \right] \\ + u_2 u \left[\left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{22}^{(0)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{1}{l_{22}^{(2)}} \right) \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\sigma} \right] = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Considérons le coefficient de u_1^2 ; la composante orthogonale de la courbure $\frac{1}{\mathcal{L}_{10}}$ suivant $d\sigma$, devant être nulle, la somme des projections des composantes obliques de cette courbure sur l'arc $d\sigma$, sera nulle, et par suite

$$\frac{1}{l_{11}^{(1)}} + \frac{\cos \varphi_1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{\cos \varphi}{l_{11}^{(2)}} = 0;$$

de là on déduit que, dans ce coefficient, la somme des deux termes positifs est égale à $-\frac{\cos \varphi}{l_{11}^{(2)}}$, ou bien à $-\frac{\cos \varphi}{l_{11}^{(2)}}$; de là résulte que ce coeffi-

cient est égal à $-\frac{\cos(\xi_{01}, d\sigma_1)}{\xi_{01}}$. On prouvera par une démonstration analogue que le coefficient de u_2^2 est égal à $-\frac{\cos(\xi_{02}, d\sigma_2)}{\xi_{02}}$.

On verra par des transformations non moins faciles, que les coefficients de $u_0 u_1$, $u_0 u_2$, $u_1 u_2$ sont

$$-\frac{\cos(\mathcal{R}, d\sigma_1)}{\mathcal{R}}, \quad -\frac{\cos(\mathcal{R}, d\sigma_2)}{\mathcal{R}}, \quad -\left[\frac{\cos(\xi_{01}, d\sigma_2)}{\xi_{01}} + \frac{\cos(\xi_{02}, d\sigma_1)}{\xi_{02}}\right].$$

On aura donc, en remarquant que les angles que les courbures $\frac{1}{\mathcal{R}}, \frac{1}{\xi_{01}}, \frac{1}{\xi_{02}}$ font avec $d\sigma$ sont droits, et que, par conséquent, les cosinus de ces angles sont nuls, l'équation transformée suivante

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} - \frac{u_0}{\mathcal{R}} \sum u_i \cos([\mathcal{R}], d\sigma) - \frac{u_1}{\xi_{01}} \sum u_i \cos(\xi_{[01]}, d\sigma) \\ - \frac{u_2}{\xi_{02}} \sum u_i \cos(\xi_{[02]}, d\sigma) = \frac{d\Phi}{d\sigma}, \end{aligned}$$

Cette équation, si l'on a égard aux formules (3), devient

$$\frac{dv_0}{dt} - \frac{u_0}{\mathcal{R}_0} \nu \cos(\mathcal{R}_0, ds) - \frac{u_1}{\xi_{01}} \nu \cos(\xi_{01}, ds) - \frac{u_2}{\xi_{02}} \nu \cos(\xi_{02}, ds) = \frac{d\Phi}{d\sigma}.$$

laquelle, par suite de l'équation (13), ne diffère pas de l'équation (23'). Ainsi notre formule (23') n'est pas distincte de la formule de Lagrange, ce qui est la proposition que nous voulions établir.

15. Équations d'équilibre d'un fil soumis à l'action de certaines forces. — Soient F_0, F_1, F_2 les composantes obliques suivant les arcs coordonnés de la résultante des forces qui agissent sur le fil, μ la tension en un quelconque de ses points que l'on considère, on trouve en opérant, comme au n° 11, l'équation suivante

$$(26) \quad \frac{d\mu}{ds} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\mu}{p^{(0)}} + F_0 = 0 \quad (3);$$

or, si l'on remplace dans cette équation $\frac{1}{p^{(0)}}$ par sa valeur donnée par

la formule (9), on obtient la formule

$$(26') \quad \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{d\sigma}{ds} \right) + \mu \sum \left[\frac{d\sigma^2}{r^{(0)} ds^2} + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left(\frac{1}{l_1^{(0)}} + \frac{1}{l_1^{(0)}} \right) \right] + F_0 = 0 \quad (3).$$

Les trois équations contenues dans cette formule donnent la trajectoire d'équilibre du fil flexible, dans un système quelconque de coordonnées curvilignes; le premier terme est une différentielle complète. On déduit de ces équations trois autres équations, donnant chacune l'expression de la composante orthogonale suivant l'un des trois arcs coordonnés de la résultante F des forces qui agissent sur le fil. Elles sont données par la formule suivante

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & F \cos(F, d\sigma) \\ &= \sum \left[\cos([d\sigma], d\sigma) \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{d\sigma}{ds} \right) \right] \\ &+ \mu \sum \left\{ \frac{d\sigma^2}{\mathcal{R} ds^2} \cos(\mathcal{R}, [d\sigma]) + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma_1}{ds} \left[\frac{\cos(\mathcal{L}_{01}, [d\sigma])}{\mathcal{L}_{01}} + \frac{\cos(\mathcal{L}_{10}, [d\sigma])}{\mathcal{L}_{10}} \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle le coefficient de μ dans le dernier terme peut être remplacé, par suite de la formule (13), par la somme

$$\sum \frac{d\sigma}{ds} \frac{\cos(\Lambda_0, [d\sigma])}{\Lambda_0}.$$

Les équations du système (26) ou du système (27) sont du second ordre, et on en déduirait par un calcul facile les intégrales premières.

L'équation (27) peut aussi s'écrire sous la forme suivante très-simple

$$(28) \quad F \cos(F, d\sigma) = \sum \frac{d}{ds} \left[\mu \frac{d\sigma}{ds} \cos([d\sigma], d\sigma) \right] - \mu \frac{\cos(\Lambda_0, ds)}{\Lambda_0};$$

il suffit pour l'obtenir de recourir aux formules (17) et de remarquer que l'angle $(\Lambda_0, d\sigma)$ est droit.

On se servira du même procédé pour établir la coïncidence des deux formules (8') et (23').

16. Du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps. — Nous nous proposons, pour dernière application, d'établir les équations du mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un corps de forme cristal-

line quelconque, même curviligne, et dans le cas d'une hypothèse particulière de conductibilité intérieure.

Équations du flux de chaleur. — Considérons le volume dm d'un solide formé par trois surfaces coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2 , coupées par trois surfaces infiniment voisines $\rho + d\rho, \rho_1 + d\rho_1, \rho_2 + d\rho_2$, et appelons $d\omega_0, d\omega_1, d\omega_2$ les trois faces de ce solide contiguës au point que l'on considère, de sorte que $d\omega_0$, par exemple, soit relative à l'angle φ . Soient U la température en ce point, π le coefficient de conductibilité intérieure ne dépendant que des coordonnées du point. Soient f_0, f_1, f_2 les flux de chaleur relatifs à ces faces, rapportés à l'unité de surface et à l'unité de temps. Dans le système rectiligne orthogonal, l'élément du volume est $dx dy dz$ et les flux de chaleur normaux aux trois faces de ce volume contiguës au point que l'on considère sont : $-\pi \frac{dU}{dx}, -\pi \frac{dU}{dy}, -\pi \frac{dU}{dz}$; donc, d'après le théorème sur la composition des flux de chaleur, le flux de chaleur qui traverse la face $d\omega$ sera

$$-\frac{\pi}{h} \left(\frac{dU}{dx} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dU}{dy} \frac{d\rho}{dy} + \frac{dU}{dz} \frac{d\rho}{dz} \right);$$

or, si l'on remplace les dérivées de U par rapport à x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (β) n° 11, l'expression précédente devient

$$-\pi \sum h \cos([n], n) \frac{dU}{d\rho};$$

on a donc, par suite des équations (18'), les relations suivantes :

$$(29) \quad f_0 = -\pi U_0, \quad f_1 = -\pi U_1, \quad f_2 = -\pi U_2,$$

qui donnent les expressions analytiques des flux de chaleur f_0, f_1, f_2 dans un système quelconque de coordonnées.

Équations du mouvement intérieur de la chaleur. — Le flux de chaleur normal à la face $d\omega_0$ et traversant cette face pendant le temps dt pour pénétrer dans le volume dm est $f_0 d\omega_0 dt$; or le flux de chaleur entrant par la face opposée est $-\left[f_0 d\omega_0 + \frac{d}{d\rho} (f_0 d\omega_0) d\rho \right] dt$, de sorte que le gain de chaleur provenant de ces deux flux est

$$-dt \frac{d}{d\rho} (f_0 d\omega_0) d\rho;$$

on trouvera des expressions semblables pour les gains de chaleur relatifs aux deux autres faces. Soit D la densité du volume dm , C sa capacité calorifique, l'accroissement de température de ce volume dans le temps dt est $\frac{dU}{dt} dt$, l'accroissement de chaleur sera $CD dm \frac{dU}{dt} dt$, on aura donc en égalant cet accroissement à la somme des trois gains relatifs aux faces opposées du parallépipède curviligne considéré, l'équation suivante :

$$(30) \quad -CD dm \frac{dU}{dt} = \sum \frac{d}{d\rho} (f, d\omega,) d\rho,$$

qui est l'équation du mouvement de la chaleur dans l'intérieur du corps.

Remarquons que l'on a la relation

$$\cos(n, d\sigma) = \sin \varphi, \sin \theta_2 = \sin \varphi, \sin \theta_1 \quad (3),$$

et que le produit $hh_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi$, que nous représentons par N , reste le même quand on fait subir aux indices des permutations circulaires; on a donc

$$dm = \frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{N} = \frac{d\omega_2 d\rho}{h} = \frac{d\omega_1 d\rho_1}{h_1} = \frac{d\omega_2 d\rho_2}{h_2};$$

d'après cela l'équation (30) devient, en ayant égard aux relations précédentes,

$$(31) \quad CD \frac{dU}{dt} = \sum N \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\pi h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_2 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_1 \right) \right],$$

qui est la forme que nous voulions donner à l'équation du mouvement de la chaleur.

Équation du mouvement de la chaleur à la surface. — L'état calorifique de la surface est donné par une équation différentielle que nous allons calculer. Pour cela, nous exprimerons que la quantité de chaleur qui traverse un élément de surface extérieure est égale à la déperdition de chaleur provenant de la température du milieu dans lequel le corps est placé, Or, si l'on représente par ϖ le coefficient de conductibilité extérieure, et par α, β, γ les angles que la normale à cet élément fait avec les arcs coordonnés $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$, la quantité de chaleur qui

traverse ce même élément pendant l'unité de temps est donné par

$$\pi \sum \frac{dU}{d\rho} \frac{\cos \alpha}{\cos(n, d\sigma)}.$$

Soit maintenant ζ la température du milieu dans lequel le corps est placé, température que nous supposons peu différente de la température U , la déperdition de chaleur par suite de cette différence de températures, à travers l'élément extérieur de surface, pendant l'unité de temps, sera égale à

$$-\omega(U - \zeta);$$

on a donc l'équation aux limites

$$(32) \quad \omega(U - \zeta) + \pi \sum \frac{dU}{d\rho} \frac{\cos \alpha}{\cos(n, d\sigma)} = 0.$$

Conséquences des équations précédentes. — 1° Si le système des coordonnées curvilignes est orthogonal, l'équation (31) devient

$$(31') \quad DC \frac{dU}{dt} = h h_1 h_2 \sum \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\pi h}{h_1 h_2} \frac{dU}{d\rho} \right).$$

2° Si le système est rectiligne orthogonal, on obtient l'équation

$$(31'') \quad DC \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\pi \frac{dU}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\pi \frac{dU}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\pi \frac{dU}{dz} \right),$$

qui, dans le cas où le corps est homogène, coïncide avec l'équation de Fourier.

3° Si l'on veut obtenir dans le cas général l'équation des températures stationnaires, il faut poser nulle la dérivée $\frac{dU}{dt}$ dans l'équation (31), et l'on obtient l'équation suivante :

$$(33) \quad \sum \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\pi h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_1 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_2 \right) \right] = 0.$$

17. Des paramètres différentiels du premier et du second ordre d'une fonction donnée. — Soit U une fonction des coordonnées du point, **M. Lamé** appelle paramètre différentiel du premier ordre de la fonc-

tion U , la somme des carrés des dérivées de cette fonction par rapport aux variables x, y, z ; paramètre différentiel du second ordre de la même fonction, la somme de ses dérivées secondes par rapport aux mêmes variables, de sorte qu'en représentant par $\Delta_1 U, \Delta_2 U$ ces deux paramètres, on a

$$\Delta_1 U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}, \quad \Delta_2 U = \frac{d^3 U}{dx^3} + \frac{d^3 U}{dy^3} + \frac{d^3 U}{dz^3}.$$

On se propose de trouver les expressions de ces paramètres différentiels, lorsqu'on passe des coordonnées x, y, z aux coordonnées curvilignes quelconques ρ, ρ_1, ρ_2 .

Si l'on élève au carré les trois équations contenues dans le type (β) du n° 11, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\Delta_1 U = \sum \frac{d^2 U}{d\rho^2} h^2 + 2 \sum \frac{dU}{d\rho_1} \frac{dU}{d\rho_2} h_1 h_2 \cos \theta.$$

On déduirait des formules contenues dans le même numéro l'expression de $\Delta_2 U$, mais il est évident que cette transformation résulte aussi de l'équation (31). En effet, dans le cas d'un corps homogène rapporté à des coordonnées rectilignes orthogonales, l'équation (31'') donne

$$\frac{CD}{\pi} \frac{dU}{dt} = \Delta_1 U;$$

or, si le même corps est rapporté à un système quelconque de coordonnées curvilignes, la même équation donne d'après la relation (31)

$$\frac{CD}{\pi} \frac{dU}{dt} = \sum N \frac{d}{d\rho} \left(\frac{U_1 h}{N} \right);$$

on a donc pour l'expression du paramètre différentiel du second ordre

$$\Delta_1 U = \sum N \frac{d}{d\rho} \left[\frac{h}{N} \left(h \frac{dU}{d\rho} + h_1 \frac{dU}{d\rho_1} \cos \theta_1 + h_2 \frac{dU}{d\rho_2} \cos \theta_2 \right) \right].$$

Si le système est orthogonal, on obtient

$$\Delta_1 U = \sum h h_1 h_2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{h}{h_1 h_2} \frac{dU}{d\rho} \right),$$

qui coïncide avec celle qui a été donnée par M. Lamé.

Si, dans le cas général d'un système quelconque de coordonnées, on suppose la fonction U égale à ρ , on trouve

$$\Delta_1 \rho = N \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{h_1}{N} \right) + \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{h h_1 \cos \theta_2}{N} \right) + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{h h_2 \cos \theta_1}{N} \right) \right] \quad (3);$$

si le système devient orthogonal, on retombe sur l'équation de M. Lamé (*Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, p. 21)

$$\Delta_1 \rho = h h_1 h_2 \frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} \quad (3).$$

Nous ne poursuivrons pas les applications que l'on peut faire de nos formules aux différentes théories de physique mathématique et en particulier à la théorie de l'élasticité. Les applications que nous avons faites suffisent pour montrer l'utilité de notre analyse en général, et en particulier la facilité avec laquelle elle se prête à l'étude des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées.

SUR LA

ROTATION DES CORPS SOLIDES,

PAR M. R. RADAU.

On connaît l'admirable théorie de la rotation des solides qui est due à Poinso^t. Jacobi, reprenant les recherches de Rueb (*), a donné du même problème une solution analytique magistrale (**). Après avoir exprimé les neuf cosinus des axes principaux en fonction du temps, il fait voir que le mouvement du corps autour d'un point fixe se compose d'une rotation *oscillatoire* autour de trois axes X, Y, Z (dont le dernier seul est fixe), et d'une rotation progressive des axes X, Y, qui tournent dans le plan invariable autour de l'axe Z avec une vitesse uniforme. La rotation oscillatoire ne dépend que d'un argument proportionnel au temps et de deux constantes. En 1850, M. Richelot a traité le problème à un autre point de vue, en déduisant toutes les intégrales de la solution d'une équation aux dérivées partielles (***). Tout récemment M. Sylvester (****) a essayé d'appliquer au même sujet des considérations nouvelles qui l'ont conduit à des résultats intéressants, à côté d'autres dont l'exactitude peut être contestée. Avant de les discuter, je rappellerai d'abord les formules qui se rapportent à cette question.

I.

Lorsqu'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice tourne autour d'un point fixe après avoir été ébranlé par un cou-

(*) *De motu gyratorio*; Utrecht, 1834.

(**) *Sur la rotation d'un corps* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, juillet 1849; — *Journal de Crelle*, t. XXXIX).

(***) *Eine neue Lösung des Problems der Rotation*,... (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1850, p. 1 à 59. — *Monatsberichte*, 1851, p. 188). — *Lettre de M. Richelot à Jacobi* (JACOBI, *Math. Werke*, t. II, p. 353).

(****) *On the motion of a rigid body* (*Philosophical Transactions*; 1866).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VI.

ple d'impulsion K , l'ellipsoïde central roule sans glisser sur un plan parallèle à celui du couple et situé à la distance $P = \frac{\sqrt{H}}{K}$ du centre.

H est la constante des forces vives; on verra plus loin que le paramètre P ne dépend que des moments d'inertie et de la direction du choc par rapport aux axes principaux. Le rayon R mené au point de contact de l'ellipsoïde est l'axe instantané de rotation; la vitesse de rotation ω est égale à $R\sqrt{H}$, elle a une composante constante $P\sqrt{H} = \frac{H}{K}$ autour de la normale P abaissée du centre sur le plan tangent, qui est le plan du couple d'impulsion et le plan invariable du mouvement.

Soient A, B, C les moments d'inertie du corps, l'équation de l'ellipsoïde central sera $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, et en désignant par x, y, z les coordonnées du point de contact, par α, β, γ les cosinus des angles que la normale P fait avec les axes principaux, on aura les relations géométriques

$$(1) \quad \frac{\alpha}{Ax} = \frac{\beta}{By} = \frac{\gamma}{Cz} = P,$$

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = P^2.$$

Je supposerai toujours que les quantités $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, P^2, \frac{1}{C}$ se succèdent par ordre de grandeur. Soit alors

$$a^2 = \frac{P^2 - \frac{1}{C}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}, \quad b^2 = \frac{P^2 - \frac{1}{C}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{C}}, \quad h^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2}, \quad \Delta\xi = \sqrt{1 - h^2 \sin^2 \xi},$$

les formules (2) nous permettent de poser

$$(3) \quad \alpha = a \cos \xi, \quad \beta = b \sin \xi, \quad \gamma = \sqrt{1 - a^2} \Delta\xi.$$

Si nous désignons par p, q, r les rotations autour des axes principaux, nous avons

$$(4) \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} = \frac{\omega}{R} = \sqrt{H} = PK,$$

d'où

$$(5) \quad \frac{Ap}{\alpha} = \frac{Bq}{\beta} = \frac{Cr}{\gamma} = K$$

et

$$(6) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2.$$

Ce sont les intégrales des forces vives et des aires. Les équations différentielles du problème sont les suivantes :

$$(7) \quad A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq,$$

$$(8) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \quad \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p,$$

et si l'on désigne par ψ_1, ψ_2, ψ_3 les longueurs des axes principaux (ou celles des nœuds des plans principaux) sur le plan invariable,

$$(9) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\beta q + \gamma r}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\gamma r + \alpha p}{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \frac{\alpha p + \beta q}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

On a d'ailleurs

$$(9 \text{ bis}) \quad \text{tang}(\psi_2 - \psi_3) = \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \quad \text{tang}(\psi_3 - \psi_1) = \frac{\beta}{\gamma\alpha}, \quad \text{tang}(\psi_1 - \psi_2) = \frac{\gamma}{\alpha\beta}.$$

Les trois équations (7), avec deux des équations (8), déterminent les quantités $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$; les longueurs ψ se trouvent ensuite par des quadratures à l'aide des équations (9), et il suffit d'en connaître une, par exemple ψ_3 , pour qu'on puisse à chaque instant déterminer la position du corps dans l'espace. Les équations (5) et (8) donnent

$$(10) \quad \frac{d\gamma}{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) K dt,$$

et si nous introduisons la variable ξ par les formules (3), nous avons

$$(11) \quad \int_0^\xi \frac{d\xi}{\Delta\xi} = u = n(t + \tau),$$

en faisant

$$n = K \sqrt{\left(\frac{1}{A} - P^2 \right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right)}.$$

Par suite

$$\alpha = a \cos am u, \quad \beta = b \sin am u, \quad \gamma = \sqrt{1 - a^2} \Delta am u.$$

Les angles qui déterminent la position des axes principaux par rap-

port à la normale P au plan invariable ne dépendent donc que de l'argument $u = n(t + \tau)$ et des deux constantes a, b (ce sont les sinus des angles que l'axe des z fait avec P au moment où l'axe des y ou l'axe des x est couché sur le plan invariable). L'une des équations (9) donnera ensuite

$$(12) \quad d\psi_1 = \frac{H}{K} dt + \frac{ab\sqrt{1-a^2}\Delta\xi}{a^2\cos^2\xi + b^2\sin^2\xi} d\xi.$$

Les longitudes ψ_1, ψ_2 , et la longitude ψ_3 de l'axe instantané R s'expriment d'une manière analogue. On a, par exemple,

$$(13) \quad d\psi_1 = \frac{H}{K} dt + \frac{ab\sqrt{1-a^2}(1-k^2)}{b^2 - k^2\sin^2\xi} \frac{d\xi}{\Delta\xi}.$$

Les constantes a, b ne changent pas de valeur, si les quatre quantités $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, P^2$ sont remplacées par

$$\pm\mu\left(\frac{1}{A} - \lambda\right), \quad \pm\mu\left(\frac{1}{B} - \lambda\right), \quad \pm\mu\left(\frac{1}{C} - \lambda\right), \quad \pm\mu(P^2 - \lambda);$$

ce qui revient à substituer à l'ellipsoïde central (ABC) un ellipsoïde *semblable, confocal* ou *contrafocal* (suivant l'expression de M. Sylvester), avec un plan invariable parallèle à l'ancien. Nous supposons que K ne change pas, d'où il suit que H sera remplacé par $\pm\mu(H - \lambda K^2)$.

Si, en même temps, on écrit $\pm \frac{dt}{\mu}$ à la place de dt , les équations (2), (10) et (12) montrent que α, β, γ ne sont pas changés, mais que les longitudes ψ sont diminuées d'une quantité $\lambda K t$, proportionnelle au temps.

Jacobi introduit l'argument a , défini par l'équation $\cos am(ia) = \frac{1}{a}$, et il exprime les neufs cosinus ($\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$) des axes principaux, rapportés aux axes X, Y, P, par les fonctions Θ des arguments u et ia . Les axes mobiles X, Y peuvent être choisis de deux manières : on peut leur attribuer la vitesse de rotation (*)

$$N = \frac{H}{K} + n \frac{\partial \log \Theta_1(ia)}{\partial a},$$

(*) Je suppose que $A < C$; l'hypothèse contraire revient à des changements de signes dans les formules.

qui est la *vitesse moyenne* des projections de l'axe instantané R et de l'axe des z (le premier terme de $\frac{d\psi_1}{dt}$ et de $\frac{d\psi_2}{dt}$), ou bien la vitesse $N_1 = N - \frac{\pi n}{2K}$, qui est la vitesse moyenne des deux autres axes (le premier terme de $\frac{d\psi_1}{dt}$ et de $\frac{d\psi_2}{dt}$; la quantité K, dans cette dernière formule, est l'intégrale elliptique complète de la première espèce). Les expressions des longitudes ψ , rapportées à une droite fixe, sont

$$\psi_1 = Nt + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)},$$

et ainsi de suite. Ces formules ont été développées par Jacobi en séries rapidement convergentes qui permettent de déterminer avec précision toutes les circonstances du mouvement rotatoire (*).

II.

Considérons maintenant deux corps dont les ellipsoïdes centraux soient semblables et également inclinés sur le plan invariable; les rapports $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C} : P^2$ seront les mêmes pour les deux systèmes, et les déplacements angulaires $\omega dt = \frac{R}{P} \frac{H}{K} dt$ seront identiques pendant des temps proportionnels à $\frac{K}{H}$.

Supposons, d'un autre côté, avec M. Sylvester, que les quantités A, B, C, P et A₁, B₁, C₁, P₁ soient dans l'une des deux relations exprimées par la formule

$$(14) \quad \lambda = \frac{1}{A} \mp \frac{1}{A_1} = \frac{1}{B} \mp \frac{1}{B_1} = \frac{1}{C} \mp \frac{1}{C_1} = P^2 \mp P_1^2;$$

selon qu'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, les deux ellipsoïdes centraux représenteront deux surfaces homofocales ou con-

(*) On trouve un exemple de calcul dans le *Recueil de Formules et de Tables* de M. HOÜEL, p. LXVI de l'*Introduction*.

trafocales. Plaçons les deux corps de manière que leurs axes principaux soient parallèles, et mettons-les en mouvement par deux couples (K) de grandeur et de direction identiques; les plans invariables seront parallèles, et les équations (2) montrent que la condition $P^2 \mp P_1^2 = \lambda$ sera satisfaite. Dans la suite du mouvement, les axes principaux cesseront d'être parallèles, mais ils resteront également inclinés sur les plans invariables, puisque les cosinus α, β, γ ne changent pas par la substitution de A_1, B_1, \dots , à la place de A, B, \dots . Les longitudes ψ ne différeront que par un terme $K\lambda t$; on ramènera donc les axes au parallélisme en faisant pivoter l'un des corps autour de la droite P d'un angle proportionnel au temps écoulé.

Supposons maintenant que (A, B, C_1) représente simplement une surface homofocale et concentrique avec l'ellipsoïde central (ABC). Les axes des deux ellipsoïdes resteront confondus, (ABC) roulera sans glisser sur son plan invariable, mais (A, B, C_1) roulera et glissera sur le plan parallèle. En effet, si l'ellipsoïde (A, B, C_1) pouvait tourner librement, il tournerait autour du rayon de contact R_1 , les longitudes des axes qui correspondent à C et C_1 différeraient d'une quantité égale à $K\lambda t$, et l'on ramènerait les deux ellipsoïdes au parallélisme en faisant pivoter (A, B, C_1) autour de P d'un angle égal à cette quantité. Mais l'ellipsoïde (A, B, C_1) est forcé de suivre le mouvement de (ABC), il tourne autour du rayon R, et ce dernier n'aboutissant pas au point de contact de (A, B, C_1) , l'ellipsoïde (A, B, C_1) glisse en même temps qu'il roule. Ce mouvement peut se décomposer en deux autres : 1° la rotation sans glissement de (A, B, C_1) supposé libre; 2° le glissement $K\lambda$ sur le plan tangent. Si nous supposons que l'ellipsoïde (A, B, C_1) entraîne son plan au lieu d'y glisser, la rotation de ce plan marquera le temps écoulé, comme le ferait un cadran mobile. Rien n'empêche d'ailleurs de prendre $\lambda = \frac{1}{C}$ et $\frac{1}{C_1} = 0$, de manière que l'ellipsoïde auxiliaire se réduise à une

ellipse. Cette remarque ingénieuse de M. Sylvester vient compléter l'appareil cinématique de Poinso, en fournissant le moyen de représenter le temps aussi bien que la vitesse de rotation. M. Sylvester démontre le même théorème géométriquement, en rappelant que les points de contact d'ellipsoïdes homofocaux avec des plans parallèles sont situés sur une hyperbole équilatère qui a la normale P abaissée du centre

pour asymptote, et en décomposant la rotation $\sqrt{H}R = KPR$ autour de R en une rotation KP, R , autour de R, et une rotation $K\lambda$ autour de P.

Pour revenir au cas des deux corps libres dont les constantes sont dans la relation exprimée par la formule (14), il est clair que l'on peut choisir A, B, C , de manière à remplir une condition donnée; on peut, par exemple, prendre $A + B = C$, relation qui caractérise l'ellipsoïde central d'un disque infiniment mince. Désignant les moments d'inertie (toujours positifs) du disque par A_0, B_0, C_0 , on aura

$$A + B = C_0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{A} \mp \frac{1}{A_0} = \frac{1}{B} \mp \frac{1}{B_0} = \frac{1}{C} \mp \frac{1}{C_0} = P^2 \mp P_0^2,$$

et ces relations déterminent les quantités A_0, B_0, C_0 en fonction de A, B, C . On trouve

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{C} = \pm \frac{B_0}{A_0 C_0}, \quad \frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \pm \frac{A_0}{B_0 C_0}, \quad \frac{1}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)}.$$

Les signes supérieurs devront être choisis lorsque C sera le plus grand, les signes inférieurs lorsque C sera le plus petit des trois moments d'inertie, la constante P^2 étant toujours comprise entre $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{C}$. Ensuite

$$\frac{1}{A_0} = \frac{1}{C_0} \pm \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right), \quad \frac{1}{B_0} = \frac{1}{C_0} \pm \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right).$$

Le mouvement d'un corps quelconque peut donc être décomposé en un glissement $K\lambda_0$ (qui est une rotation autour de l'axe P) et une rotation identique à celle d'un disque dont les moments d'inertie sont A_0, B_0, C_0 . La rotation d'un disque a d'ailleurs une composante constante autour d'un axe situé dans le plan du disque; en effet, les deux équations (6), appliquées au mouvement d'un disque, donnent

$$A, B_0(p^2 + q^2) = C_0 H_0 - K^2,$$

d'où il suit que la composante $\sqrt{p^2 + q^2}$ est égale à une constante. Il se trouve aussi que le mouvement du disque ne dépend que de trois paramètres. En effet, les équations (2), jointes aux suivantes :

$$\frac{d\gamma}{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) K dt, \quad (\alpha^2 + \beta^2) d\psi = \left(\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B}\right) K dt, \quad K = \frac{1}{P^2} \frac{H}{K},$$

nous apprennent que les cosinus α , β , γ et les angles ψ dépendent des quatre paramètres AP^2 , BP^2 , CP^2 , $KP^2 t = \frac{H}{K} t$, qui se réduisent à trois lorsque nous avons $A + B = C$. M. Sylvester en conclut que le mouvement rotatoire de tous les corps imaginables pourrait être réduit en tables à triple entrée dont les trois arguments seraient les paramètres $A_0 P_0^2$, $B_0 P_0^2$ et $\frac{H_0}{K} t$ (en faisant abstraction du glissement $K\lambda_0$). Cette réduction, à laquelle M. Sylvester paraît attacher beaucoup d'importance, résultait cependant des formules de Jacobi. En effet, les trois paramètres du disque remplacent simplement a , b , nt , ou bien k , a , u . On trouve

$$\frac{a}{A_0} = \frac{b}{B_0} = \frac{a+b}{C_0}, \quad \frac{K}{C_0} = \frac{n}{\sqrt{1-a^2}}, \quad C_0 P_0^2 = 1 + ab,$$

$$\frac{H_0}{K} = n \frac{1+ab}{\sqrt{1-a^2}}, \quad K\lambda_0 = \frac{H}{K} \mp \frac{H_0}{K}.$$

Pour la composante $\sqrt{p^2 + q^2}$ de la rotation du disque, on aurait encore

$$\sqrt{p^2 + q^2} = K \frac{a+b}{C_0} = n \frac{a+b}{\sqrt{1-a^2}}.$$

On voit que les trois paramètres se réduisent à ceux qui figurent dans les formules connues. Mais M. Sylvester va plus loin, il pense que le problème pourrait se résoudre par l'observation directe du mouvement d'un ellipsoïde matériel, roulant sur un plan fixe, en même temps qu'il tournerait autour de son centre également fixe. On ne se figure pas facilement par quel artifice on fixerait le centre d'un ellipsoïde matériel. Mais cela fût-il possible, l'analyse par laquelle M. Sylvester croit démontrer qu'un ellipsoïde placé dans ces conditions tournerait exactement comme un corps libre ayant un ellipsoïde central semblable, cette analyse soulève les plus graves objections. M. Sylvester commence par supposer que la pression et le frottement sur le plan fixe ont une résultante qui passe par l'axe instantané, il admet donc que cet axe coïncide avec le rayon de contact; mais cela implique que l'ellipsoïde matériel *roule sans glisser*, c'est-à-dire qu'il se meut exactement comme l'ellipsoïde central d'un corps libre, et que les deux problèmes comportent

les mêmes intégrales. M. Sylvester tire effectivement de ses équations différentielles l'intégrale des forces vives pour l'ellipsoïde matériel, et il dit que ce résultat pouvait se prévoir d'après les principes généraux de la Mécanique. Cela n'est pas exact, car le principe des forces vives ne s'applique pas au cas où il y a frottement. Ensuite M. Sylvester désigne par ρ le rapport des temps dt et $d\tau$ pendant lesquels les deux ellipsoïdes exécutent la même rotation angulaire : cela *suppose* évidemment qu'ils *puissent se mouvoir* d'une manière analogue, ce qui n'est ni démontré, ni même vrai.

Soient A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie de l'ellipsoïde central (ABC) du corps libre dont les moments d'inertie sont A, B, C ; on aura

$$(15) \quad A_1 = m \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right), \quad B_1 = m \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} \right), \quad C_1 = m \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right),$$

où m est un facteur numérique; les équations (2) donneront

$$(16) \quad A_1 \alpha^2 + B_1 \beta^2 + C_1 \gamma^2 = \frac{A_1 + B_1 + C_1}{2} - m P^2 = Q,$$

et les équations (6)

$$(16 \text{ bis}) \quad A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 = m \frac{(A + B + C)H - K^2}{ABC}.$$

Ainsi la force vive de l'ellipsoïde central (ABC) est constante en même temps que celle du corps. La force vive de l'ellipsoïde matériel, semblable à l'ellipsoïde central (ABC), l'étant aussi d'après M. Sylvester, il en conclut que le rapport $\rho = \frac{d\tau}{dt}$ est une constante, et que les mouvements ne diffèrent que par la valeur de l'argument nt . Cette analogie lui paraît si importante, qu'il propose d'étudier le mouvement d'ellipsoïdes matériels par des moyens graphiques, en vue d'une application au mouvement de rotation de la Terre.

III.

Mais le mouvement d'un ellipsoïde matériel qui tourne autour de son centre supposé fixe en roulant sur un plan tangent fixe suit d'autres lois. Nous avons d'abord les équations (1), (2) et (3), qui disent simplement

que la distance P du centre au plan tangent est constante; elles permettent d'exprimer α , β , γ par la variable ξ . Soient A_1 , B_1 , C_1 les moments d'inertie de l'ellipsoïde, dont les axes sont $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}$; la seconde des équations (2), différenciée et combinée avec (8) et (15), donnera encore

$$(17) \quad (B_1 - C_1) \frac{p}{\alpha} + (C_1 - A_1) \frac{q}{\beta} + (A_1 - B_1) \frac{r}{\gamma} = 0.$$

Comme l'une des trois équations (8) résulte toujours des deux autres, les cinq équations (2) et (8) ne comptent que pour quatre. Nous en aurons trois autres en modifiant les équations (7) par l'introduction des couples de résistance et de frottement. Soit J la résistance du plan fixe, elle produit un couple dont les composantes sont

$$Zy - Yz = J(\gamma y - \beta z) = \frac{J}{P} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \beta \gamma = \frac{J}{mP} (C_1 - B_1) \beta \gamma, \dots$$

Le frottement est proportionnel à J , ou bien égal à Jf , et dirigé suivant la tangente perpendiculaire au rayon vecteur R ; ses cosinus sont

$$\frac{\gamma y - \beta z}{\sqrt{R^2 - P^2}}, \dots,$$

et le couple de frottement JfR a les composantes

$$\frac{Jf\alpha}{\sqrt{R^2 - P^2}} \left(R^2 - \frac{1}{A} \right), \dots$$

On trouve d'ailleurs

$$P^2 R^2 = \frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\gamma^2}{C^2},$$

et, par l'équation (16),

$$m^2 P^2 (R^2 - P^2) = A_1^2 \alpha^2 + B_1^2 \beta^2 + C_1^2 \gamma^2 - Q^2.$$

Les équations (3) donnent

$$P^2 (R^2 - P^2) = \left(P^2 - \frac{1}{C} \right) \left(\frac{\cos^2 \xi}{A} + \frac{\sin^2 \xi}{B} - P^2 \right),$$

de sorte que α, β, γ, R s'expriment par la variable ξ . Les équations (7) deviennent à présent

$$(18) \quad A, \frac{dp}{dt} = (B, - C,) \left(qr - \beta \gamma \frac{J}{mP} \right) + \alpha \frac{Jf}{\sqrt{R - P^2}} \left(R - \frac{1}{A} \right), \dots,$$

et si nous les réunissons aux équations (2), (8) et (17), nous avons le moyen de déterminer les sept inconnues $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, J$. Ajoutons les équations (18), multipliées par α, β, γ , aux équations (8), multipliées par A, p, B, q, C, r , et prenons l'intégrale, nous aurons

$$A, \alpha p + B, \beta q + C, \gamma r = f \int J \sqrt{R - P^2} dt.$$

Si le frottement était nul ($f = 0$), on aurait l'intégrale des aires

$$(19) \quad A, \alpha p + B, \beta q + C, \gamma r = F,$$

où F signifie une constante arbitraire. Dans ce cas, on aurait aussi l'intégrale des forces vives

$$(20) \quad A, p^2 + B, q^2 + C, r^2 = H.$$

Les équations (19) et (20), combinées avec (16) et (8), donneraient

$$B, C, \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + C, A, \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + A, B, \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 = HQ - F^2.$$

Ensuite

$$\alpha d\alpha : \beta d\beta : \gamma d\gamma :: B, - C, : C, - A, : A, - B,.$$

On tire de là

$$(21) \quad \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \sqrt{HQ - F^2} m dt = \frac{d\alpha}{\beta \gamma} \sqrt{S},$$

où

$$S = \Sigma A, B, (A, - B,)^2 \alpha^2 \beta^2 = Q \Sigma A,^2 \alpha^2 - (\Sigma A,^2 \alpha^2)^2.$$

En introduisant à la place de α, β, γ la variable ξ , on trouve

$$\frac{S}{m^2} = \frac{Q(A + B + C)P^2 - 1}{ABC} - \left[\left(\frac{P^2}{A} + \frac{1}{BC} \right) \sin^2 \xi + \left(\frac{P^2}{B} + \frac{1}{AC} \right) \cos^2 \xi \right],$$

et en faisant

$$n^2 = m^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) \left(\frac{1}{A} - P^2 \right) (HQ - F^2),$$

on a

$$(22) \quad n_1 t = \int \frac{d\xi}{\Delta\xi} \sqrt{S}.$$

Le temps est donné par une intégrale Abélienne. Les rotations p, q, r se déterminent par les formules

$$(23) \quad Q \frac{p}{\alpha} = F + (A, Q - \Sigma A_i^2 \alpha_i) \sqrt{\frac{HQ - F^2}{S}}, \dots$$

Enfin, la résistance J peut être calculée à l'aide de l'équation

$$(24) \quad J = \frac{mP}{A, B, C,} \frac{d\Sigma A_i^2 p_i}{d\Sigma \frac{\alpha_i^2}{A_i}}.$$

On voit combien le mouvement de notre ellipsoïde matériel diffère de celui d'un corps libre.

IV.

Pour terminer, reprenons encore le problème du corps libre, dont il nous reste à compléter la solution. Le nombre des équations différentielles strictement nécessaires étant de six, le problème comporte six constantes arbitraires. En rapportant tous les angles au plan invariable, nous avons restreint le nombre des constantes à quatre : H, K, τ et la constante que l'on peut ajouter aux longitudes ψ ; mais nous pouvons encore disposer des deux qui déterminent la position du plan invariable par rapport à un plan fixe donné, et qui sont : l'inclinaison c et la longitude du nœud g . Je ferai maintenant

$$\alpha = \sin \theta \sin \varphi, \quad \beta = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma = \cos \theta,$$

j'écrirai ψ à la place de ψ_1 , et je supposerai que θ, φ, ψ sont les angles qui déterminent la position des axes par rapport au plan fixe donné, puis $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ les mêmes angles rapportés au plan invariable. Ces derniers sont alors des fonctions connues du temps. Les formules du § I donnent

$$n(t + \tau) = u, \quad \cos \theta_0 = \sqrt{1 - a^2} \Delta \operatorname{am} u, \quad \tan \varphi_0 = \frac{a}{b} \cot \operatorname{am} u.$$

La valeur de ψ_0 pourrait se tirer de l'équation (12), mais l'une des

équations (9) donne aussi

$$(25) \quad d\psi_0 + \cos\theta_0 d\varphi_0 = \frac{H}{K} dt,$$

d'où

$$(26) \quad \psi_0 = \frac{H}{K} \frac{u}{n} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \cos\theta_0 d\varphi_0.$$

(Nous n'ajoutons pas de constante, parce que ψ_0 n'est plus une variable du problème : ce n'est ici qu'un angle auxiliaire.) Les angles θ, θ_0 , étant les inclinaisons du plan des x, y sur les deux plans fixes, et c l'inclinaison mutuelle de ces plans, nous avons un triangle sphérique où le côté opposé à c est $\varphi_0 - \varphi$; par conséquent,

$$(27) \quad \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) = \cos c,$$

ou bien

$$(28) \quad \sin\theta(a \sin\varphi \cos am u + b \cos\varphi \sin am u) + \cos\theta \sqrt{1-a^2} \Delta am u = \cos c.$$

Si nous désignons par Ψ, Ψ_0 les côtés opposés à $\pi - \theta_0, \theta$, ils seront déterminés en fonction des variables $\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0$ par les relations

$$(29) \quad \frac{\sin\Psi_0}{\sin\theta} = \frac{\sin\Psi}{\sin\theta_0} = \frac{\sin(\varphi_0 - \varphi)}{\sin c},$$

ou bien

$$\cos\Psi = \frac{\cos c \cos\theta - \cos\theta_0}{\sin c \sin\theta}, \dots$$

On aura ensuite

$$(30) \quad \psi + g = \Psi, \quad \psi_0 + g_0 = \Psi_0,$$

en désignant par g, g_0 deux constantes arbitraires. Les équations (27) et (30) représentent trois intégrales qui, ajoutées aux deux intégrales (6) et à l'intégrale du temps

$$(31) \quad t + \tau = \frac{u}{n},$$

complètent le nombre des six intégrales demandées. Elles renferment

les six constantes H, K, c, τ, g, g_0 . Mais nous pouvons aussi considérer u comme une fonction des variables θ, φ et des trois constantes H, K, c , définie par l'équation (28). Dès lors, $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ seront également des fonctions de θ, φ, H, K, c , et les intégrales (30) et (31) peuvent être considérées comme étant de la forme

$$\begin{aligned} g_0 &= f(\theta, \varphi, H, K, c), \\ \psi + g &= f(\theta, \varphi, H, K, c), \\ t + \tau &= f(\theta, \varphi, H, K, c). \end{aligned}$$

On arrive au même résultat en prenant pour point de départ l'équation aux dérivées partielles du problème de la rotation. Les trois quantités p, q, r s'expriment par les dérivées θ', φ', ψ' des angles θ, φ, ψ à l'aide des formules connues

$$p = \alpha\psi' + \cos\varphi\theta', \quad q = \beta\psi' - \sin\varphi\theta', \quad r = \gamma\psi' + \varphi'.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression de la force vive

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

on peut introduire comme variables les dérivées partielles

$$s = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad v = \frac{\partial T}{\partial \theta'}, \quad f = \frac{\partial T}{\partial \psi'}.$$

Soit encore

$$\omega = \frac{f - s \cos \theta}{\sin \theta}, \quad f = s \cos \theta + \omega \sin \theta,$$

on aura

$$s = Cr = K \cos \theta_0,$$

$$v = Ap \cos \varphi - Bq \sin \varphi = K \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi),$$

$$\omega = Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi = K \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi),$$

et

$$(32) \quad s^2 + v^2 + \omega^2 = K^2.$$

L'équation (27) donne encore

$$(33) \quad f = K \cos c = F;$$

c'est l'une des intégrales des aires, et nous pouvons introduire F à la place de c comme troisième arbitraire qui s'ajoute aux constantes H , K . L'intégrale des forces vives prend la forme

$$(34) \quad \frac{s^2}{C} + v^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{A} + \frac{\sin^2 \varphi}{B} \right) + \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + v\omega \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin 2\varphi = H.$$

Pour déduire de (34) l'équation aux dérivées partielles dont la solution V fournit les six intégrales du problème, nous devons y remplacer s par $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, v par $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, et f (contenu dans ω) par $\frac{\partial V}{\partial \psi}$; mais cette dernière dérivée étant une constante, puisque ψ ne figure pas dans (34), nous pouvons écrire F à la place de f . Dès lors, les équations (34) et (33) permettent d'exprimer s et v par θ , φ , H , K , F , et nous aurons (*)

$$V = -\frac{1}{2} H t + F \psi + \int (s d\varphi + v d\theta).$$

En substituant pour s , v les expressions trouvées plus haut, nous avons

$$V = -\frac{1}{2} H t + F \psi + K \int \cos \theta_0 d\varphi_0 + K \int [-\cos \theta_0 d(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) d\theta].$$

Or, dans le triangle sphérique dont les angles sont c , θ , $\pi - \theta_0$, et les côtés correspondants $\varphi_0 - \varphi$, Ψ_0 , Ψ , nous avons, par une formule connue,

$$(35) \quad d\Psi_0 - \cos c d\Psi = -\cos \theta_0 d(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) d\theta.$$

Par conséquent,

$$(36) \quad V = -\frac{1}{2} H t + F(\psi - \Psi) + K\Psi_0 + K \int \cos \theta_0 d\varphi_0,$$

ou bien, en tenant compte de (26),

$$(37) \quad V = H \left(\frac{u}{n} - \frac{1}{2} t \right) + F(\psi - \Psi) + K(\Psi_0 - \psi_0).$$

(*) JACOBI, *Nova methodus...*, p. 151 (*Journal de Crelle*, 1861).

Il faut ici considérer u , ψ_0 , Ψ , Ψ_0 comme des fonctions de θ , φ , H , K , F , en tirant la valeur de u de l'équation (28). Les intégrales premières du problème seraient alors

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = s, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = F = f,$$

ou bien

$$K \cos \theta_0 = C(\varphi' + \cos \theta \psi'), \dots$$

Les trois intégrales finies seraient

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{\partial V}{\partial K} = g, \quad \frac{\partial V}{\partial F} = -g.$$

Pour tirer de (36) la variation δV par rapport aux constantes H , K , F , nous avons d'abord, en vertu de (35),

$$K \delta \Psi_0 - F \delta \Psi = -K \cos \theta_0 \delta \varphi_0.$$

Ensuite, l'équation

$$\left(\frac{\sin^2 \varphi_0}{A} + \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} - \frac{1}{C} \right) \sin^2 \theta_0 = P^2 - \frac{1}{C}$$

nous donne

$$K(d\varphi_0 \delta \cos \theta_0 - d \cos \theta_0 \delta \varphi_0) = K^2 P \delta P dt = \left(\frac{1}{2} \delta H - \frac{H}{K} \delta K \right) \frac{du}{n}.$$

On trouve ainsi

$$(38) \quad \delta V = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{n} - t \right) \delta H + (\psi - \Psi) \delta F + (\Psi_0 - \psi_0) \delta K,$$

et les intégrales sont

$$t + \tau = \frac{u}{n}, \quad \psi + g = \Psi, \quad \psi_0 + g_0 = \Psi_0.$$

Les formules qui précèdent s'accordent, aux notations et à la démonstration près, avec celles que M. Richelot a publiées en 1850, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*. Quant à la for-

mule (38), M. Serret l'a donnée à son tour en 1863, mais sans indiquer l'expression de V .

On pourrait aussi prendre s et φ pour variables indépendantes à la place de θ , φ . En faisant

$$\omega = \frac{F - s \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{K^2 - s^2 - v^2},$$

$$\omega_1 = \frac{s - F \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{K^2 - F^2 - v^2},$$

on aurait

$$F \sin \theta = \omega + \omega_1 \cos \theta, \quad s \sin \theta = \omega_1 + \omega \cos \theta,$$

et les variables θ , φ s'exprimeraient en fonction de s , v par les formules suivantes :

$$\sin \theta = \frac{F\omega + s\omega_1}{K^2 - v^2}, \quad \cos \theta = \frac{Fs - \omega\omega_1}{K^2 - v^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{Ap\omega - Bqv}{K^2 - s^2}, \quad \cos \varphi = \frac{Apv + Bq\omega}{K^2 - s^2},$$

dans lesquelles Ap , Bq sont des fonctions de s en vertu des équations (6). Si nous désignons par Δ les variations totales (variations des constantes et des variables), nous avons

$$\Delta v + \omega \Delta \varphi = A \cos \varphi \Delta p - B \sin \varphi \Delta q = a_1 \Delta s + b_1 \delta H + c_1 \delta K,$$

$$\Delta s + v \Delta \theta = \cos \theta \delta F + \sin \theta \Delta \omega_1 = a_2 \Delta v + b_2 \delta F + c_2 \delta K,$$

et en désignant par d les différentielles, par δ les variations prises dans l'hypothèse de $\delta \varphi = \delta \theta = 0$, par δ_1 les variations prises dans l'hypothèse de $\delta_1 v = \delta_1 s = 0$,

$$\delta s d\varphi + \delta v d\theta + \delta_1 \varphi ds + \delta_1 \theta dv = 0,$$

ou bien

$$\delta \int (s d\varphi + v d\theta) = - \delta_1 \int (\varphi ds + \theta dv).$$

Voici d'ailleurs les expressions développées des variations Δ :

$$\Delta v + \omega \Delta \varphi = \left[v + \omega \frac{dt}{ds} \left(H - \frac{K^2}{C} \right) \right] \frac{\frac{1}{2} \Delta (K^2 - s^2)}{K^2 - s^2} - \frac{1}{2} \omega \frac{dt}{ds} \delta \left(H - \frac{K^2}{C} \right),$$

$$\omega_1 (\Delta s + v \Delta \theta) = - \omega \delta F + \sin \theta (K \delta K - v \Delta v).$$

On retrouve ainsi les formules données par M. Lafon (*) en 1860, ainsi qu'une autre solution que M. Richelot indique dans le *Mémoire* déjà cité; traduite dans nos notations, elle peut s'écrire

$$V = -\frac{1}{2} H t + F\left(\psi - \arctang \frac{\nu}{\omega_1}\right) \\ + K \left(\arctang \frac{F \nu}{K \omega_1} + \arctang \frac{s \nu}{K \omega} \right) - \frac{H - \frac{K^2}{C}}{A - B} \int \frac{s^2}{K^2 - s^2} \frac{ds}{pq}.$$

Jacobi emploie les mêmes variables s, ν dans le *Mémoire sur la Théorie du dernier multiplicateur* (**), où il établit aussi les six intégrales du problème sans recourir aux propriétés du plan invariable.

(*) *Mémoires de l'Académie de Stanislas*, 1860.

(**) *Journal de Crelle*, t. XXIX, 1845. — *Math. W.*, t. I, p. 187.

ESSAI D'INTERPRÉTATION

DE

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

PAR M. E. BELTRAMI,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par M. J. HOÜEL.

Extrait du *Giornale di Matematiche*, t. VI, 1868.

Dans ces derniers temps, le public mathématicien a commencé à s'occuper de nouvelles idées, qui semblent destinées à modifier profondément les notions que l'on s'est formées jusqu'à présent sur l'origine des vérités géométriques.

Ces idées ne sont pas de date récente. L'illustre Gauss les avait adoptées dès ses premiers pas dans la carrière scientifique, et bien qu'aucun de ses écrits n'en contienne l'exposition développée, ses lettres nous montrent à quel point il s'y était attaché, et nous témoignent de sa pleine adhésion à la doctrine de Lobatchefsky.

Nous avons cherché à nous rendre compte à nous-même des résultats auxquels conduit cette nouvelle doctrine; et, suivant un procédé qui nous semble tout à fait conforme aux bonnes traditions de l'investiga-

tion scientifique, nous avons essayé de lui trouver une base réelle. Nous croyons y avoir réussi pour la partie planimétrique; mais il nous semble impossible d'y parvenir dans le cas de trois dimensions.

Le présent Mémoire est destiné principalement à développer la première de ces thèses; quant à la seconde, nous nous contenterons pour le moment de quelques indications, pour que l'on puisse mieux juger du sens que nous attachons à notre interprétation.

Pour ne pas interrompre trop souvent la suite de notre exposition, nous avons renvoyé à des Notes spéciales, placées à la fin du Mémoire, les explications relatives à certains résultats analytiques sur lesquels nous devons nous appuyer.

I.

Le critérium fondamental des démonstrations de la Géométrie élémentaire consiste dans la *superposition des figures égales*.

Ce critérium n'est pas seulement applicable au plan, mais aussi à toutes les surfaces sur lesquelles il peut exister des figures égales dans différentes positions, c'est-à-dire à toutes les surfaces dont une portion quelconque peut être appliquée exactement, par simple flexion, sur une autre portion quelconque de la surface elle-même. On voit, en effet, que la rigidité des surfaces sur lesquelles les figures sont tracées, n'est pas une condition essentielle de l'application de ce critérium; par exemple, l'exactitude des démonstrations de la Géométrie plane euclidienne ne serait en rien altérée, si l'on venait à concevoir les figures comme tracées sur la surface d'un cylindre ou d'un cône, au lieu de l'être sur un plan.

Les surfaces pour lesquelles se vérifie sans restriction la propriété dont il s'agit, sont, en vertu d'un théorème célèbre de Gauss, toutes celles qui ont en chacun de leurs points le produit de leurs deux rayons de courbure principaux constant, ou, en d'autres termes, toutes celles dont la mesure de courbure est constante. Les autres surfaces n'admettent pas sans restriction l'application du principe de superposition pour la comparaison des figures qui y sont tracées, et, par suite, ces figures ne peuvent avoir une structure entièrement indépendante de leur position.

L'élément le plus essentiel des figures et des constructions de la Géométrie est la ligne droite. Le caractère spécifique de cette ligne est d'être complètement déterminée par deux de ses points seulement, en sorte que deux droites ne peuvent passer par deux points donnés de l'espace sans coïncider dans toute leur étendue. Cependant, dans la Géométrie plane, ce caractère n'est pas employé dans toute son extension, puisque, en regardant les choses de près, on voit que la droite n'est introduite dans les considérations de la Planimétrie qu'en vertu du *postulat* suivant : « En faisant coïncider deux plans, sur chacun desquels existe une droite, il suffit que les deux droites se superposent en deux points pour qu'elles se confondent dans toute leur étendue. »

Or ce caractère, ainsi limité, n'est pas particulier aux lignes droites par rapport au plan ; il subsiste encore (en général) pour les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante, par rapport à ces surfaces. Une ligne géodésique a déjà sur une surface quelconque la propriété d'être (généralement parlant) déterminée sans ambiguïté par deux de ses points. Mais pour les surfaces de courbure constante, et pour elles seules, subsiste intégralement la propriété analogue à celle de la droite dans le plan, c'est-à-dire que : « Si l'on a deux surfaces dont la courbure soit constante en chaque point, et égale pour les deux surfaces, et si sur chacune d'elles existe une ligne géodésique, en faisant coïncider les deux surfaces de manière que les lignes géodésiques aient deux points communs, ces lignes coïncideront (généralement) dans toute leur étendue. »

Il s'ensuit de là que, sauf les cas dans lesquels cette propriété est sujette à des exceptions, les théorèmes que la Planimétrie démontre, au moyen du principe de superposition et du postulat de la droite, pour les figures formées sur le plan, subsistent également pour les figures formées d'une manière analogue sur une surface de courbure constante par des lignes géodésiques.

C'est sur cela que sont fondées les analogies multiples de la Géométrie de la sphère avec celle du plan, les droites de celui-ci correspondant aux lignes géodésiques, c'est-à-dire aux grands cercles de celle-là, et ces analogies ont été depuis longtemps déjà remarquées par les géomètres. Si d'autres analogies, d'espèce différente, mais de même origine, n'ont pas été pareillement remarquées tout d'abord, il faut l'at-

tribuer à ce que la notion de surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres n'est devenue familière que dans ces derniers temps.

Nous avons fait allusion à des exceptions qui peuvent détruire ou restreindre l'analogie en question. Ces exceptions existent réellement. Sur la surface sphérique, par exemple, deux points cessent de déterminer un grand cercle sans ambiguïté, quand ils sont diamétralement opposés. C'est pour cette raison que certains théorèmes de la Planimétrie n'ont pas leurs analogues sur la sphère, comme, par exemple, le suivant : « Deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent se rencontrer. »

Ces réflexions ont été le point de départ de nos recherches actuelles. Nous avons commencé par remarquer que les conséquences d'une démonstration embrassent nécessairement la catégorie entière des êtres dans lesquels existent toutes les conditions nécessaires pour sa légitimité. Si la démonstration a été conçue en vue d'une catégorie déterminée d'êtres, sans que l'on y ait effectivement introduit les déterminations qui particularisent la catégorie elle-même vis-à-vis d'une catégorie plus étendue, il est clair que les conséquences de la démonstration acquièrent une généralité plus grande que celle que l'on cherchait. Dans ce cas, il peut très-bien arriver que quelques-unes de ces conséquences semblent inconciliables avec la nature des êtres que l'on a eus spécialement en vue, d'autant que certaines propriétés, qui subsistent généralement pour une catégorie donnée d'êtres, peuvent se modifier notablement, ou même disparaître tout à fait, pour quelques-uns de ces êtres en particulier. S'il en est ainsi, les résultats des recherches auxquelles on s'est livré présentent des contradictions apparentes, que l'esprit ne peut comprendre, s'il ne commence par s'apercevoir de la trop grande généralité de la base de son investigation.

Cela dit, considérons les démonstrations de la Planimétrie qui se fondent uniquement sur l'usage du principe de superposition et sur le postulat de la droite, telles que sont précisément celles de la Planimétrie non euclidienne. Les résultats de ces démonstrations subsistent sans restriction dans tous les cas pour lesquels subsistent ce principe et ce postulat. Ces cas sont nécessairement tous compris, d'après ce qu'on a vu, dans la doctrine des surfaces de courbure constante; mais ils ne peuvent se vérifier que pour celles de ces surfaces dans lesquelles au-

cune exception n'a lieu aux hypothèses de ces démonstrations. L'existence du principe de superposition ne souffre d'exception pour aucune de ces surfaces. Mais pour ce qui regarde le postulat de la droite (ou pour mieux dire, de la ligne géodésique), nous avons déjà remarqué qu'il se rencontre des exceptions sur la sphère, et par conséquent sur toutes les surfaces de courbure constante positive. Maintenant ces exceptions existent-elles aussi sur les surfaces de courbure constante négative? En d'autres termes, peut-il arriver, sur ces dernières surfaces, que deux points ne déterminent pas une ligne géodésique unique?

Cette question n'a pas été examinée, que je sache. Si l'on peut prouver que de telles exceptions ne sont pas possibles, il devient évident *a priori* que les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne subsistent sans restriction pour toutes les surfaces de courbure constante négative. Alors certains résultats qui semblaient incompatibles avec l'hypothèse du plan peuvent devenir conciliables avec celle d'une surface de l'espèce en question, et recevoir par là une explication non moins simple que satisfaisante. En même temps, les déterminations qui produisent le passage de la Planimétrie non euclidienne à la Planimétrie euclidienne peuvent s'expliquer avec celles qui spécifient les surfaces de courbure nulle dans la série des surfaces de courbure constante négative.

Telles sont les considérations qui nous ont servi de guides dans les recherches suivantes.

II.

La formule

$$(1) \quad ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2) du^2 + 2uv du dv + (a^2 - u^2) dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}$$

représente le carré de l'élément linéaire d'une surface dont la courbure sphérique est partout constante, négative et égale à $-\frac{1}{R^2}$. La forme de cette expression, bien que moins simple que celles d'autres expressions équivalentes, que l'on pourrait obtenir en introduisant d'autres variables, a l'avantage particulier (très-important pour notre but actuel), que toute équation linéaire par rapport à u et à v représente une ligne géodésique, et que, réciproquement, toute ligne géodésique est

représentée par une équation linéaire entre ces variables. (Voyez la Note I à la fin de cet article.)

En particulier aussi les deux systèmes coordonnés

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

sont formés de lignes géodésiques dont il est facile de reconnaître la disposition mutuelle. En appelant, en effet, θ l'angle des deux courbes coordonnées au point (u, v) , on a

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \quad \sin \theta = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}},$$

d'où l'on tire $\theta = \frac{\pi}{2}$, tant pour $u = 0$ que pour $v = 0$. Donc les lignes géodésiques formant le système $u = \text{const.}$ sont toutes orthogonales à la ligne géodésique $v = 0$ de l'autre système, et les lignes géodésiques du système $v = \text{const.}$ sont toutes orthogonales à la ligne géodésique $u = 0$ de l'autre système. Cela revient à dire que, au point $u = v = 0$, concourent deux lignes géodésiques orthogonales entre elles

$$u = 0, \quad v = 0,$$

que nous appellerons *fondamentales*, et chaque point de la surface est déterminé comme intersection de deux lignes géodésiques menées par ce point perpendiculairement aux deux lignes fondamentales : ce qui constitue évidemment une généralisation de la méthode cartésienne ordinaire.

Les formules (2) font voir que les valeurs admissibles pour les variables u, v sont limitées par la relation

$$(3) \quad u^2 + v^2 \leq a^2.$$

Entre ces limites, les fonctions E, F, G sont réelles, monodromes, continues et finies, et, de plus, les quantités E, G, $EG - F^2$ sont positives et différentes de zéro. Donc, d'après ce que nous avons établi au commencement du Mémoire *Sur les variables complexes dans une surface quelconque* (*), la portion de surface terminée au contour qui a pour équation

$$(4) \quad u^2 + v^2 = a^2$$

(*) *Annali di Matematica*, 2^e série, t. I.

est simplement connexe, et le réseau formé sur cette portion par les lignes géodésiques coordonnées présente autour de chaque point le caractère de celui qui est formé par deux systèmes de droites parallèles sur un plan; c'est-à-dire que deux lignes géodésiques de même système n'ont jamais aucun point commun, et deux lignes géodésiques de système différent ne sont jamais tangentes entre elles. Il s'ensuit de là que, sur la région considérée, à chaque couple de valeurs réelles de u, v satisfaisant à la condition (3) correspond un point réel, unique et déterminé; et réciproquement, à chaque point correspond un couple unique et déterminé de valeurs réelles de u, v satisfaisant à la condition en question.

Si donc nous désignons par x, y les coordonnées rectangulaires des points d'un plan auxiliaire, les équations

$$x = u, \quad y = v.$$

établissent une représentation de la région considérée, représentation dans laquelle à chaque point de cette région correspond un point unique et déterminé du plan, et réciproquement; et toute la région se trouve représentée à l'intérieur d'un cercle de rayon a , ayant pour centre l'origine des coordonnées, et que nous appellerons *cercle-limite*. Dans cette représentation, aux lignes géodésiques de la surface correspondent les cordes du cercle-limite, et, en particulier, aux lignes géodésiques coordonnées correspondent les lignes parallèles aux deux axes coordonnés.

Voyons maintenant comment est limitée, sur la surface, la région à laquelle s'appliquent les considérations précédentes.

Une ligne géodésique issue du point ($u = 0, v = 0$) peut être représentée par les équations

$$(5) \quad u = r \cos \mu, \quad v = r \sin \mu,$$

r et μ étant les coordonnées polaires du point correspondant au point (u, v) de la droite qui représente (sur le plan auxiliaire) la ligne géodésique considérée. Pour de telles valeurs, on tire de (1), μ étant constant,

$$d\rho = R \frac{a dr}{a^2 - r^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + r}{a - r},$$

ρ étant l'arc de la ligne géodésique, compté à partir du point ($u = v = 0$).
On peut encore écrire

$$(6) \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}},$$

u, v étant les coordonnées de la seconde extrémité de l'arc ρ . Le radical $\sqrt{u^2 + v^2}$ doit être pris ici positivement, si l'on veut obtenir la valeur absolue de la distance ρ .

Cette valeur est nulle pour $r = 0$; elle va en croissant indéfiniment, lorsqu'on fait croître r ou $\sqrt{u^2 + v^2}$ depuis 0 jusqu'à a ; elle devient infinie pour $r = a$, c'est-à-dire pour les valeurs de u, v qui satisfont à l'équation (4), et elle est imaginaire quand $r > a$. Il est donc clair que le contour exprimé par l'équation (4), et représenté sur le plan auxiliaire par le cercle-limite, n'est autre chose que le lieu des points à l'infini de la surface, lieu qui peut être considéré comme un cercle géodésique ayant pour centre le point ($u = v = 0$), et dont le rayon (géodésique) est infini. Au delà de ce cercle géodésique de rayon infini, il n'existe plus que les régions imaginaires ou idéales de la surface, de sorte que la région considérée ci-dessus s'étend indéfiniment, et d'une manière continue dans tous les sens, et embrasse la totalité des points réels de la surface. Ainsi à l'intérieur du cercle limite se trouve représentée toute la région réelle de notre surface, et cela de telle sorte que, tandis que le même cercle-limite correspond à la ligne de ses points à l'infini, les cercles concentriques et intérieurs au cercle-limite correspondent aux cercles géodésiques de la surface ayant leur centre au point ($u = v = 0$).

Si dans les équations (5) on regarde r comme constant, μ comme variable, ces équations conviennent à un cercle géodésique, et la formule (1) donne

$$(7) \quad \sigma = \frac{R r \mu}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

σ étant l'arc de cercle géodésique représenté sur le plan auxiliaire par l'arc de cercle dont r est le rayon, et μ l'angle au centre. σ étant proportionnel à μ , quel que soit r , on voit aisément que les lignes géodésiques ρ font entre elles, à l'origine commune, les mêmes angles que les rayons qui leur correspondent sur le plan auxiliaire, et que la portion

de surface infiniment petite qui entoure immédiatement le point ($u = v = 0$) est semblable à sa représentation plane, propriété qui n'a lieu pour aucun autre point.

De l'équation (6) on tire

$$(7') \quad r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \tanh \frac{\rho}{R}, \quad \text{et} \quad \cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a}{w},$$

w désignant la valeur positive du radical $\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$. En vertu de la valeur précédente de r , l'équation (7) peut s'écrire

$$\sigma = \mu R \sinh \frac{\rho}{R},$$

de sorte que le demi-périmètre de la circonférence géodésique de rayon ρ est donné par la formule

$$(8) \quad \pi R \sinh \frac{\rho}{R}, \quad \text{ou} \quad \frac{i}{2} \pi R (e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}}).$$

De ce qui précède il résulte que les lignes géodésiques de la surface sont représentées, dans leur développement total (réel), par les cordes du cercle-limite, tandis que les prolongements de ces cordes en dehors de ce même cercle n'ont aucune représentation (réelle). D'autre part, deux points réels de la surface sont représentés par deux points, également réels, intérieurs au cercle-limite, lesquels déterminent *une* corde de ce cercle. On voit donc que deux points réels de la surface, *choisis d'une manière quelconque*, déterminent *toujours une ligne géodésique unique*, qui est représentée sur le plan auxiliaire par la corde passant par leurs points correspondants.

Ainsi les surfaces de courbure constante négative *ne sont pas sujettes* aux exceptions qui ont lieu sous ce rapport dans les surfaces de courbure constante positive, et, par suite, on peut leur appliquer les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne. Il y a plus, ces théorèmes, en grande partie, ne sont susceptibles d'une interprétation concrète que si on les rapporte précisément à ces surfaces, au lieu du plan, comme nous allons le démontrer tout à l'heure avec détail. Pour éviter les circonlocutions, nous appellerons *pseudosphériques* les surfaces de courbure constante négative, et nous conserverons le nom de *rayon* à la constante R , dont dépend la valeur de leur courbure.

III.

Cherchons premièrement la relation générale qui existe entre l'angle de deux lignes géodésiques et l'angle des cordes qui les représentent.

Soient (u, v) un point d'une surface, (U, V) un point quelconque d'une des lignes géodésiques qui partent du premier point; représentons les équations de deux de ces lignes par

$$V - v = m(U - u), \quad V - v = n(U - u).$$

En appelant α l'angle des lignes géodésiques au point (u, v) , on a, par une formule connue,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(n - m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n + m)F + mnG},$$

ou, pour les valeurs actuelles de E, F, G ,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a(n - m)\omega}{(1 + mn)a^2 - (v - mu)(v - nu)}.$$

En désignant par α' l'angle des deux cordes, et par μ, ν les angles que font ces cordes avec l'axe des x , on a

$$m = \operatorname{tang} \mu, \quad n = \operatorname{tang} \nu, \quad \alpha' = \nu - \mu,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a\omega \sin \alpha'}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \sin \mu)(v \cos \nu - u \sin \nu)}.$$

Le dénominateur du second membre reste toujours fini en tout point réel de la surface; partant, l'angle α ne peut être nul que lorsque le numérateur est égal à zéro. Mais $\sin \alpha'$ n'est pas nul, puisque les deux cordes se coupent à l'intérieur du cercle limite et ne se confondent pas en une seule droite. Donc α n'est nul que pour $\omega = 0$, c'est-à-dire quand le point de rencontre des deux lignes géodésiques s'en va à l'infini.

On peut donc formuler les règles suivantes :

I. A deux cordes distinctes qui se coupent à l'intérieur du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui se coupent en un point à une distance finie, sous un angle différent de 0 et de 180 degrés.

II. A deux cordes distinctes qui se coupent sur la circonférence du cercle-limite correspondent deux lignes géodésiques qui concourent vers un même point à une distance infinie, et qui font en ce point un angle nul.

III. Enfin, à deux cordes distinctes qui se coupent hors du cercle-limite, ou qui sont parallèles, correspondent deux lignes géodésiques qui n'ont aucun point commun dans toute l'étendue (réelle) de la surface.

Soient maintenant pq (*fig. 1*) une corde quelconque du cercle-limite,

Fig. 1.



r un point de l'intérieur du cercle, non situé sur la corde. A cette corde correspond sur la surface une ligne géodésique $p'q'$, dirigée vers les points à l'infini p' , q' (correspondants à p , q); au point r correspond un point r' , situé à une distance finie et hors de la ligne géodésique $p'q'$. De ce point on peut tirer une infinité de lignes géodésiques, dont les unes rencontrent la ligne géodésique $p'q'$, et les autres ne la rencontrent pas. Les premières sont représentées par les droites qui vont du point r aux divers points de l'arc pbq (< 180 degrés); les autres sont représentées par les droites qui vont du même point aux divers points de l'arc pcq (> 180 degrés). Deux lignes géodésiques particulières forment le passage de l'une des catégories à l'autre : ce sont

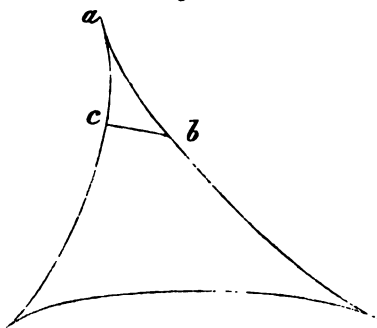
celles qui sont représentées par les droites rp , rq , c'est-à-dire les deux lignes géodésiques qui partent de r' et rencontrent $p'q'$ à l'infini, l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté. Comme les angles rectilignes rpq , rqp ont leurs sommets sur la circonférence du cercle-limite, il s'ensuit de là (II) que les angles géodésiques correspondants $r'p'q'$, $r'q'p'$ sont nuls, bien que les premiers soient finis. Au contraire, r étant intérieur au cercle en question, et situé hors de la corde pq , l'angle prq est différent de 0 et de 180 degrés, et par suite (I) les lignes géodésiques correspondantes $r'p'$, $r'q'$ forment en r' un angle qui diffère aussi de 0 et de 180 degrés. Donc si les lignes géodésiques $r'p'$, $r'q'$ sont dites *parallèles* à $p'q'$, à cause qu'elles marquent le passage de la catégorie de celles qui rencontrent $p'q'$ à la catégorie de celles qui ne la rencontrent pas, on peut énoncer le résultat en disant que : « Par un point (réel) quelconque de la surface, on peut toujours mener *deux* lignes géodésiques (réelles), parallèles à une même ligne géodésique (réelle) qui ne passe pas par ce point, et ces deux lignes géodésiques font entre elles un angle qui diffère à la fois de 0 et de 180 degrés. »

Ce résultat s'accorde, sauf la différence des termes employés, avec ce qui forme la base de la géométrie non euclidienne. Pour apercevoir immédiatement, dans la géométrie pseudosphérique, l'interprétation des autres énoncés de la géométrie non euclidienne, considérons un triangle géodésique. On sait que, lorsqu'on étudie des figures tracées sur une surface non développable sur un plan, il est souvent à propos, pour faciliter l'intelligence, de dessiner sur un plan une autre figure, qui, sans être déduite de la première suivant une loi géométrique déterminée, sert toutefois à en *indiquer* approximativement la disposition générale, en reproduisant les relations de situation les plus essentielles. Pour que la figure indicative remplisse cette condition, il faut que toutes les grandeurs, tant linéaires qu'angulaires, de la figure donnée s'y trouvent remplacées par des grandeurs de même espèce respectivement ; il faut, en outre, que les longueurs de deux lignes correspondantes, et les sinus de deux angles correspondants aient toujours entre eux un rapport fini ; peu importe, d'ailleurs, que ce rapport varie arbitrairement d'une partie de la figure à l'autre, pourvu qu'il ne devienne jamais ni nul ni infini. Il est évident, du reste, qu'avec une telle latitude de choix, il convient de faire en sorte que, dans la figure

indicative, le rapport en question ne s'écarte pas trop d'une certaine valeur moyenne.

Cela posé, si le triangle géodésique dont nous parlions tout à l'heure a tous ses sommets à des distances finies, il est clair qu'un triangle plan quelconque peut lui servir de représentation. Ce triangle plan pourrait être le triangle rectiligne même qui en est la représentation sur le plan auxiliaire, triangle qui serait totalement intérieur au cercle-limite. On pourrait encore, suivant les circonstances, préférer un triangle curviligne, dont les angles seraient, par exemple, égaux à ceux du triangle géodésique. Mais si l'on suppose que les sommets du triangle géodésique aillent en s'éloignant indéfiniment et passent à une distance infinie, il est clair que, tandis que le triangle lui-même continue à être une figure existant sur la surface, et dont tous les points, sauf les sommets, sont à des distances finies, la figure indicative ne saurait être finie dans tous les sens, sans violer quelques-unes des conditions que nous avons formulées. Par exemple, le triangle rectiligne représentant le triangle géodésique sur le plan auxiliaire aurait ses angles finis, tandis que ceux du triangle géodésique seraient nuls. Et un triangle curviligne dont les côtés seraient tangents entre eux aux sommets violerait pareillement les conditions en question, en ce que, si l'on prenait deux points b, c (*fig. 2*) sur les côtés qui se rencontrent en un

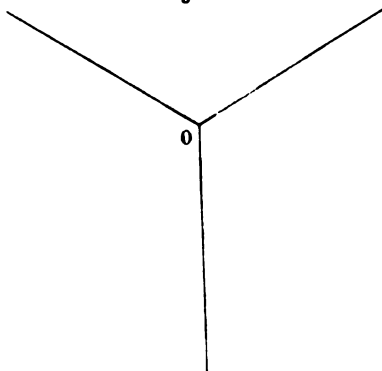
Fig. 2.



sommet a , on obtiendrait des intervalles ab, bc dont le rapport serait fini dans le triangle indicatif, infini dans le triangle géodésique. Pour faire disparaître ce désaccord, il faudrait que tous les intervalles analogues à bc fussent nuls dans la figure indicative, ce qui ne pourrait

se réaliser qu'en donnant à celle-ci la disposition de la *fig. 3*, où le point O concentre en lui seul la représentation de tous les points situés à distance finie dans le triangle géodésique. Une telle figure pourrait être conçue comme résultant de l'observation du triangle géodésique au moyen d'une lentille douée de la propriété (fictive) de produire

Fig. 3.



un rapetissement infini. En effet, dans une telle hypothèse, tous les intervalles finis apparaîtraient comme nuls, et les intervalles infinis comme finis.

Cela s'accorde en substance avec ce que Gauss a remarqué dans sa lettre du 12 juillet 1831 à Schumacher (*), dans laquelle il ajoute encore que le demi-périmètre du cercle non euclidien de rayon ρ a pour valeur

$$\frac{1}{2} \pi k \left(e^{\frac{\rho}{k}} - e^{-\frac{\rho}{k}} \right),$$

k étant une constante. Cette constante, que Gauss dit nous être indiquée par l'expérience comme ayant une valeur très-grande par rapport à tout ce que nous pouvons mesurer, n'est autre chose, suivant notre point de vue actuel, et en vertu de la formule (8), que le rayon de la surface pseudosphérique que nous introduisons à notre insu dans la Planimétrie à la place du plan euclidien, toutes les fois que nos considérations

(*) Voyez l'Appendice à la traduction des *Études géométriques sur la Théorie des Parallèles* de Lobatchelsky, par M. HOÜEL.

s'appuient sur les seules prémisses qui sont vraies à la fois pour le plan et pour les surfaces de la classe en question.

IV.

Si nous voulons maintenant établir d'une manière plus concrète l'accord de la Géométrie pseudosphérique avec la Planimétrie non euclidienne, il est nécessaire d'examiner attentivement l'expression analytique que nous avons employée pour représenter l'élément linéaire de la surface pseudosphérique. Et avant tout envisageons la question suivante : « Les deux lignes géodésiques que nous avons appelées *fondamentales* doivent-elles être choisies de quelque manière particulière, pour que l'élément linéaire ait la forme indiquée ci-dessus ? » Il semblerait, à la vérité, qu'on pût les choisir arbitrairement, puisque, si toute portion de surface est superposable d'une manière quelconque à la surface elle-même, il est clair que deux lignes géodésiques orthogonales quelconques, situées sur cette portion, peuvent être amenées à coïncider avec deux autres quelconques pareillement orthogonales. Comme la question que nous venons de soulever est essentielle pour notre but, nous avons cru convenable d'y consacrer la Note II, dans laquelle, en démontrant directement que les lignes géodésiques fondamentales sont arbitraires, nous prouvons en même temps, sans qu'il soit besoin d'admettre aucunes connaissances préliminaires sur ce sujet, que toute portion de surface est applicable d'une manière quelconque sur la surface elle-même.

En conséquence de ce fait et des raisons déjà exposées, les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne, relatifs aux figures planes rectilignes, ont lieu nécessairement aussi pour les figures géodésiques analogues tracées sur la surface pseudosphérique. Telles sont, par exemple, celles des nos 3-10, 16-24, 29-30, etc., de la *Théorie des Parallèles* de Lobatchefsky.

Considérons maintenant les deux lignes géodésiques tirées d'un point donné, parallèlement à une ligne géodésique donnée. Soit δ la longueur de la normale géodésique abaissée de ce point sur cette ligne géodésique. Cette normale divise en deux parties égales l'angle des

deux parallèles. En effet, si l'on détache la bande superficielle comprise entre la ligne géodésique normale, une des parallèles et la moitié correspondante de la ligne géodésique donnée; si on la retourne, et qu'on l'applique de nouveau sur la surface, de manière que la normale coïncide avec elle-même, tandis qu'une moitié de la ligne géodésique donnée se superpose à l'autre moitié, il est clair que la parallèle qui limite la bande doit se superposer à l'autre parallèle, sans quoi par le point donné on pourrait mener plus de deux parallèles à la ligne géodésique donnée. Appelons *angle de parallélisme* l'angle formé par chacune des parallèles avec la normale, et désignons-le par Δ . Pour calculer cet angle, faisons usage de notre analyse habituelle, en plaçant l'origine ($u = v = 0$) au point donné, et dirigeant la ligne géodésique fondamentale $v = 0$ normalement à la ligne géodésique donnée, de telle sorte que cette dernière se trouve représentée par l'équation

$$u = a \tanh \frac{\delta}{R},$$

comme on le déduit facilement de la formule (8).

A cette ligne géodésique correspond, dans le plan auxiliaire, une corde perpendiculaire à l'axe des x , coupée en deux parties égales par cet axe, et dont une des extrémités a pour ordonnée la quantité $\frac{a}{\cosh \frac{\delta}{R}}$.

Ce point du cercle-limite détermine le rayon qui a pour équation

$$y = \frac{x}{\sinh \frac{\delta}{R}},$$

et auquel correspond sur la surface une des parallèles considérées; et puisque les angles autour de l'origine sont égaux sur la surface et sur le plan auxiliaire, on doit évidemment avoir

$$(9) \quad \tan \Delta \sinh \frac{\delta}{R} = 1,$$

formule qui contient la relation cherchée entre la distance normale δ et l'angle de parallélisme Δ . Elle coïncide avec celle qui a été trouvée

par M. Battaglini (*). Pour la comparer avec celle de Lobatchefsky, il suffit de l'écrire sous la forme

$$e^{-\frac{\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}} \cot \Delta - 1 = 0,$$

et d'en tirer

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{-\cos \Delta \pm 1}{\sin \Delta}.$$

Le signe inférieur est inadmissible, puisque $\frac{\delta}{R}$ est une quantité réelle; donc

$$\tanh \frac{1}{2} \Delta = e^{-\frac{\delta}{R}},$$

ce qui est précisément la formule de Lobatchefsky (**), sauf la différence des symboles, et celle qui provient du choix de l'unité.

En désignant, comme le fait Lobatchefsky (n° 16), par $\Pi(z)$ l'angle de parallélisme relatif à la distance normale z , on a, par l'équation (9),

$$(10) \quad \cosh \frac{z}{R} = \frac{1}{\sin \Pi(z)}, \quad \sinh \frac{z}{R} = \cot \Pi(z).$$

Or, d'après une observation de M. Minding (***), développée par M. Codazzi (****), on sait que les formules ordinaires relatives aux triangles sphériques se changent dans celles qui se rapportent aux triangles géodésiques des surfaces de courbure constante négative, lorsqu'on multiplie par $\sqrt{-1}$ les rapports des côtés au rayon, et qu'on n'altère en rien les angles, ce qui revient à changer les fonctions circulaires des côtés en fonctions hyperboliques. Par exemple, la première formule de la Trigonométrie sphérique

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A$$

(*) *Giornale di Matematiche*, t. V, p. 225. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 267.

(**) *Études géométriques*, n° 38.

(***) *Journal de Crelle*, t. XX, p. 325.

(****) *Annales de Tortolini*, 1857, p. 354 et suiv.

devient

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos A.$$

En introduisant, à la place des côtés a, b, c , les angles de parallélisme correspondants, au moyen des formules (10), cette relation se change dans la suivante,

$$\cos A \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,$$

ce qui est une des équations fondamentales de la Planimétrie non euclidienne (*). Les autres s'obtiennent d'une manière analogue (**).

Les résultats précédents nous semblent faire pleinement ressortir la correspondance qui a lieu entre la Planimétrie non euclidienne et la Géométrie pseudosphérique. Pour vérifier la même chose d'un autre point de vue, nous allons encore établir directement, avec notre analyse, le théorème relatif à la somme des trois angles d'un triangle.

Considérons le triangle rectangle formé par la ligne géodésique fondamentale $v = 0$, par une des lignes géodésiques perpendiculaires $u = \text{const.}$, et par la ligne géodésique issue de l'origine sous l'angle μ , et dont l'équation est

$$v = u \tan \mu.$$

Appelons μ' le troisième angle de ce triangle. L'angle qui lui correspond dans le plan auxiliaire est $90^\circ - \mu$, et par suite la relation établie précédemment entre les angles correspondants sur la surface et sur le plan donne

$$\tan \mu' = \frac{u \cos \mu}{a \sin \mu},$$

d'où l'on voit que, quand μ est un angle aigu, il en est de même de μ' . Comme on a $v = u \tan \mu$, cette formule peut s'écrire, en prenant le radical positivement,

$$\tan \mu' = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}}{a \sin \mu}, \quad \text{d'où} \quad d\mu' = - \frac{a \sin \mu \cdot u du}{(a^2 - u^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}},$$

(*) *Études géométriques*, n° 37.

(**) Le passage inverse de ces équations à celles de la Trigonométrie sphérique a été indiqué par Lobatchefsky (p. 34), mais comme un simple fait analytique.

expression de l'accroissement que reçoit μ' , lorsque, μ restant constant, on déplace le côté de l'angle droit opposé à cet angle. Cela posé, si l'on intègre l'élément superficiel

$$du dv \sqrt{EG - F^2} = R^2 u \frac{du dv}{(a^2 - u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

par rapport à v , entre $v = 0$ et $v = u \tan \mu$, ce qui donne

$$\frac{R^2 a \sin \mu u du}{(a^2 - u^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - u^2}}, \quad \text{ou} \quad -R^2 d\mu',$$

on a l'accroissement que reçoit l'aire du triangle considéré, lorsqu'on déplace le côté de l'angle droit opposé à l'angle μ . En intégrant de nouveau entre $\mu' = 90^\circ - \mu$ et $\mu' = \mu'$ (valeurs dont la première correspond évidemment à $u = 0$), on trouve

$$R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \mu - \mu' \right),$$

expression de l'aire totale du triangle rectangle. De cette expression on passe aisément à celle de l'aire d'un triangle géodésique quelconque ABC, en le partageant en deux triangles rectangles par une ligne géodésique menée par un des sommets normalement au côté opposé, et l'on trouve

$$R^2(\pi - A - B - C).$$

Cette expression, devant être positive, montre que la somme des trois angles d'un triangle géodésique quelconque ne peut jamais surpasser 180 degrés. Si cette somme était égale à 180 degrés dans un seul triangle de dimensions finies, il faudrait que l'on eût $R = \infty$, et alors dans tout autre triangle fini on aurait de même $A + B + C = \pi$. Mais pour $R = \infty$ l'équation (9) donne $\Delta = \frac{\pi}{2}$; donc l'angle de parallélisme serait nécessairement droit, et réciproquement. Ce sont là les conclusions auxquelles parvient aussi la Géométrie non euclidienne.

Le triangle formé par une ligne géodésique et par les deux lignes géodésiques menées parallèlement à la première par un point extérieur a deux angles nuls, et le troisième égal à 2Δ ; donc son aire est finie, et donnée par la formule

$$R^2(\pi - 2\Delta),$$

ou, en vertu de l'équation (9),

$$2R^2 \operatorname{arctang} \left(\sinh \frac{\delta}{R} \right),$$

δ étant la distance du point à la ligne géodésique. Pour R très-grand, cette quantité est à peu près égale à $2\delta R$, et, par suite, infinie pour le plan, comme on sait, mais infinie dans ce cas seulement.

Un triangle géodésique dont les sommets sont tous à l'infini a une aire finie et déterminée, dont la valeur $= \pi R^2$ est indépendante de sa forme.

Un polygone géodésique de n côtés, dont les angles intérieurs sont A, B, C, \dots , a pour aire

$$R^2[(n-2)\pi - A - B - C - \dots].$$

Si le polygone a tous ses sommets à l'infini, son aire, qui ne cesse pas d'être finie, se réduit à $(n-2)\pi R^2$, et est par conséquent indépendante de sa forme.

V.

Passons maintenant à l'étude des courbes que nous avons appelées, d'après l'usage reçu aujourd'hui, des *circonférences géodésiques*.

A la fin de la Note II, nous avons trouvé que la circonférence géodésique ayant pour centre un point quelconque (u_0, v_0) et pour rayon géodésique ρ est représentée par l'équation

$$(11) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation générale nous sera utile dans la suite; mais actuellement nous pouvons profiter des simplifications qui résultent de la supposition que l'origine ($u = v = 0$) est placée au centre de la circonférence considérée. En donnant à l'expression de l'élément linéaire (comme dans la Note II) la forme

$$ds^2 = R^2 \frac{\omega^2(du^2 + dv^2) + (udu + vdv)^2}{\omega^4},$$

et posant

$$u = r \cos \varphi, \quad v = r \sin \varphi,$$

on en déduit immédiatement l'expression équivalente

$$ds^2 = R^2 \left[\left(\frac{adr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{a^2 - r^2} \right].$$

Mais en appelant ρ la distance géodésique du point (u, v) ou (r, φ) à l'origine, on a, comme on sait,

$$\frac{adr}{a^2 - r^2} = \frac{d\rho}{R}, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \sinh^2 \frac{\rho}{R};$$

donc

$$(12) \quad ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 d\varphi^2,$$

expression déjà connue de l'élément linéaire de la surface pseudosphérique.

Cette expression rentre dans la forme canonique de l'élément linéaire d'une surface de révolution. Mais il faut observer que, dans le cas actuel, on ne pourrait pas appliquer effectivement sur une surface de révolution la calotte pseudosphérique qui entoure le point $(u = v = 0)$, sans altérer la continuité au moyen de quelque section opérée dans cette calotte à partir de ce même point. En effet, la surface de révolution supposée, si elle existait sans cette condition, rencontrerait son propre axe au centre commun $(\rho = 0)$ de toutes les circonférences géodésiques $\rho = \text{const.}$, et aurait par suite en ce point ses deux courbures de même sens, ce qui est impossible, puisqu'une surface pseudosphérique a tous ses points *hyperboliques*. La même impossibilité résulte de la considération de cette circonstance, que, si l'on ne voulait pas exécuter la section dont nous venons de parler, la variable φ représenterait la longitude du méridien variable, et, partant, le rayon du parallèle correspondant à l'arc méridien serait $R \sinh \frac{\rho}{R}$. La varia-

tion de ce rayon serait par conséquent $= \cosh \frac{\rho}{R} d\rho$, c'est-à-dire $> d\rho$, ce qui est absurde, puisque la variation en question est égale à la projection de $d\rho$ sur le plan du parallèle.

L'expression (12) de l'élément linéaire, bien que privée des avantages inhérents à l'usage de nos variables u, v , peut être parfois utile

à cause de sa simplicité. Elle se prête, par exemple, à la détermination de la courbure tangentielle des circonférences géodésiques, laquelle, dans la circonférence de rayon ρ , a pour valeur $\frac{1}{R \operatorname{tanh} \frac{\rho}{R}}$; cette

courbure est donc constante tout le long de la périphérie du cercle géodésique, et ne dépend que du rayon. Cette propriété peut encore s'apercevoir *a priori*, en observant que la portion de surface terminée par un cercle géodésique peut s'appliquer d'une manière quelconque sur la surface elle-même, sans que son contour cesse jamais d'être un cercle géodésique ayant son centre au point où est venu s'appliquer son centre primitif.

Le théorème que « les lignes géodésiques élevées normalement sur » les milieux des cordes d'une circonférence géodésique concourent » toutes en son centre, » se démontre comme le théorème correspondant de la Planimétrie ordinaire, et l'on en conclut que la construction du centre de la circonférence passant par trois points non situés sur une même ligne géodésique est tout à fait analogue à la construction ordinaire, en sorte que cette circonférence est toujours unique et déterminée.

Mais ici se présente une difficulté. Trois points de la surface étant choisis arbitrairement, il peut arriver que les lignes géodésiques perpendiculaires sur les milieux des lignes de jonction ne se coupent en aucun point *réel* de la surface; et par suite, si l'on restreint la dénomination de *circonférences géodésiques* aux courbes décrites par l'extrémité d'un arc géodésique invariable qui tourne autour d'un point *réel* de la surface, il faut nécessairement admettre qu'on ne peut pas toujours faire passer une circonférence géodésique par trois points de la surface choisis d'une manière quelconque. Cela encore est d'accord, *mutatis mutandis*, avec les principes de Lobatchefsky (*).

Néanmoins, puisque les lignes géodésiques de la surface sont toujours représentées par les cordes du cercle-limite, si plusieurs cordes sont telles que, prolongées, elles se rencontrent en un point extérieur au cercle, il est permis de regarder les lignes géodésiques correspon-

(*) *Études géométriques*, n° 29.

dantes comme ayant un point *idéal* commun, et leurs trajectoires orthogonales comme quelque chose d'analogue aux circonférences géodésiques proprement dites.

Cherchons directement l'équation de ces trajectoires.

L'équation

$$v - v_0 = k(u - u_0)$$

représente le système des lignes géodésiques issues du point (u_0, v_0) , réel ou idéal, suivant que $u_0^2 + v_0^2$ est plus petit ou plus grand que a^2 . L'équation différentielle de ce système est

$$\frac{du}{u - u_0} = \frac{dv}{v - v_0},$$

et, par suite, celle du système orthogonal sera

$$[E(u - u_0) + F(v - v_0)]du + [F(u - u_0) + G(v - v_0)]dv = 0,$$

c'est-à-dire, pour les valeurs actuelles de E, F, G,

$$d \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = 0.$$

Donc

$$(13) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C$$

est l'équation finie des circonférences géodésiques conçues dans le sens le plus général, c'est-à-dire, quel qu'en soit le centre (u_0, v_0) , réel ou idéal.

Quand ce centre est réel, sa distance à la courbe est constante, en vertu d'un théorème bien connu; et en effet, si l'on désigne par ρ cette distance, on a, par comparaison avec l'équation (11),

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{C}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}.$$

Dans ce cas, il est clair que parmi les valeurs admissibles de la constante C n'est pas comprise la valeur zéro, puisque le lieu correspondant à cette hypothèse, étant représenté sur le plan auxiliaire par une

droite extérieure au cercle-limite, tombe tout entier dans les régions idéales de la surface.

Quand, au contraire, le centre est idéal, la notion du rayon géodésique fait défaut; mais la constante C peut recevoir la valeur zéro, puisque l'équation résultante

$$u^2 - uu_0 - vv_0 = 0$$

représente, sur le plan auxiliaire, une corde du cercle-limite, et précisément la polaire du point extérieur (u_0, v_0) . Cette équation définit une ligne géodésique réelle de la surface; on en peut donc conclure que, parmi les circonférences géodésiques en nombre infini qui ont le même centre idéal, il y a toujours une ligne géodésique réelle, et une seule, de sorte que les circonférences géodésiques à centre idéal peuvent aussi se définir comme des courbes parallèles (géodésiquement) aux lignes géodésiques réelles. Cette dernière propriété a été déjà remarquée par M. Battaglini, en des termes différents (*). On voit donc que, tandis que, sur la surface sphérique, les deux idées de *circonférence géodésique* et de *courbe parallèle à une ligne géodésique* se confondent complètement l'une avec l'autre; sur la surface pseudosphérique, au contraire, elles présentent une différence, dépendant de la réalité ou de l'idéalité du centre.

Puisque toute circonférence géodésique à centre idéal est équidistante, en tous ses points, d'une ligne géodésique déterminée, supposons que celle-ci soit la ligne $v = 0$ elle-même, ce qui est toujours permis, et appelons ξ la distance géodésique du point (u, v) à cette ligne fondamentale. Cette distance est mesurée sur une des lignes géodésiques du système $u = \text{const.}$, et est donnée par la formule

$$\xi = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u^2} + v}{\sqrt{a^2 - u^2} - v}.$$

En supposant ξ constant, on tire de là l'équation entre u et v d'une quelconque des circonférences géodésiques qui ont leur centre au point

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. VII, p. 272.

de concours idéal de toutes les lignes géodésiques normales à la ligne $v = 0$.

Appelons η l'arc de la ligne géodésique $v = 0$ compris entre l'origine et la normale ξ ; sa valeur est donnée par l'équation

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a + u}{a - u}.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$u = a \tanh \frac{\eta}{R}, \quad v = \frac{a \tanh \frac{\xi}{R}}{\cosh \frac{\eta}{R}},$$

d'où

$$w^2 = a^2 - u^2 - v^2 = \frac{a^2}{\cosh^2 \frac{\xi}{R} \cosh^2 \frac{\eta}{R}}.$$

En passant ainsi des variables u, v aux variables ξ, η , l'expression (1) devient

$$(14) \quad ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2 \frac{\xi}{R} d\eta^2,$$

expression qui convient à une surface de révolution.

En désignant par r_0 le rayon du parallèle minimum de cette surface, lequel correspond évidemment à $\xi = 0$, et par r celui du parallèle ξ , on a

$$r = r_0 \cosh \frac{\xi}{R}, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dr}{d\xi} = \frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R}.$$

Donc la zone de surface pseudosphérique qui peut être réellement transformée en surface de révolution est définie par la condition

$$\left(\frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R} \right)^2 < 1,$$

c'est-à-dire qu'elle est renfermée entre deux circonférences géodésiques équidistantes de la ligne géodésique $\xi = 0$, laquelle se dispose suivant le parallèle minimum. La largeur de cette zone dépend du rayon que l'on veut assigner au parallèle minimum, et est d'autant plus

grande que ce rayon est plus petit. La longueur de la zone est indéfinie, et par suite la zone s'enroule un nombre infini de fois sur la surface de révolution; à cette occasion il faut observer que les points qui se superposent de cette manière les uns aux autres, doivent être toujours considérés comme distincts, sans quoi le théorème, que par deux points de la surface passe une seule ligne géodésique, cesserait d'être vrai. En d'autres termes, on devra concevoir la surface de révolution comme la limite d'un hélicoïde dont le pas converge vers zéro. Les deux parallèles extrêmes ont leur rayon $= \sqrt{R^2 + r_0^2}$, et leurs plans sont tangents circulairement à la surface.

Entre les circonférences géodésiques à centre réel et celles à centre idéal, se trouvent, comme figures intermédiaires, les circonférences géodésiques qui ont leur centre à l'infini; ces circonférences méritent d'être étudiées, à cause de leurs propriétés très-remarquables.

L'équation générale de ces circonférences conserve la forme (13), puisque la méthode qui nous y conduit subsiste pour toutes les positions du centre. Mais si l'on compare cette équation à l'équation (11), dans laquelle la quantité $\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}$ ou ω_0 converge vers zéro quand le centre passe à l'infini, tandis que, dans la même hypothèse, le second membre croît indéfiniment, on voit que le produit $\omega_0 \cosh \frac{\rho}{R}$ tend vers une valeur finie, vers laquelle tend, évidemment, de même le produit $\frac{1}{2} \omega_0 e^{\frac{\rho}{R}}$. Or, si l'on remplace ρ par $\rho' - \rho$, l'équation (11) peut s'écrire

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{\omega_0}{2} e^{\frac{\rho'}{R}} e^{-\frac{\rho}{R}} + \frac{\omega_0}{2} e^{-\frac{\rho'}{R}} e^{\frac{\rho}{R}};$$

donc, en laissant ρ fini, et faisant croître ρ' indéfiniment, tandis que ω_0 converge vers zéro, il vient, à la limite,

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = k e^{-\frac{\rho}{R}},$$

k étant une constante. En représentant de cette manière le système des circonférences géodésiques qui ont leur centre à l'infini au point (u_0, v_0) , le paramètre ρ exprime l'intervalle constant entre une quel-

conque de ces circonférences et une autre d'entre elles considérée comme fixe, et croît positivement à partir de cette dernière vers le centre à l'infini. En faisant $k = a$, la circonférence $\rho = 0$ devient celle qui passe par le point ($u = v = 0$).

Si avec l'équation ainsi obtenue

$$(15) \quad \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = ae^{-\frac{\rho}{R}},$$

on combine l'équation

$$(16) \quad \frac{u_0 v - uv_0}{a^2 - uu_0 - vv_0} = \frac{\sigma}{R},$$

et que l'on tienne compte de la relation $u_0^2 + v_0^2 = a^2$, on trouve que l'élément linéaire (1) prend la forme

$$(17) \quad ds^2 = d\rho^2 + e^{-\frac{2\rho}{R}} d\sigma^2,$$

forme qui convient encore à une surface de révolution.

En désignant par r_0 le rayon du parallèle $\rho = 0$, dont σ est l'arc, et par r celui du parallèle ρ , il vient

$$r = r_0 e^{-\frac{\rho}{R}},$$

et par suite la surface de révolution n'est réelle que dans l'intervalle des limites déterminées par la relation $\rho > R \log \frac{r_0}{R}$, en sorte que la circonférence $\rho = 0$ ne peut pas devenir réellement un parallèle, si l'on ne prend pas $r_0 \leq R$. Le parallèle maximum a pour rayon R , et correspond à la valeur $\rho = R \log \frac{r_0}{R}$; donc, en déterminant convenablement r_0 , ce parallèle peut être recouvert par une quelconque des circonférences considérées; par exemple, en faisant $r_0 = R$, on a la circonférence initiale elle-même $\rho = 0$. Le parallèle minimum correspond à $\rho = \infty$, et son rayon est nul, de sorte que la surface de révolution s'approche asymptotiquement de son axe d'un seul côté, tandis que de l'autre elle est limitée par le parallèle maximum, avec lequel elle se raccorde tangentielllement. Sur cette surface s'enroule une infinité de fois la surface pseudosphérique, terminée à la ligne $\rho = 0$, si $r_0 = R$.

La courbure tangentielle d'un parallèle quelconque se trouve être $\frac{1}{R}$, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous. Or le rayon de la courbure tangentielle d'un parallèle n'est autre chose que la portion de tangente au méridien comprise entre le point de contact (sur le parallèle considéré) et l'axe. Donc, pour la surface de révolution dont il s'agit, cette portion de tangente est constante; la courbe méridienne est la *ligne connue aux tangentes égales*, et la surface engendrée est celle que l'on regarde ordinairement comme le type des surfaces de courbure constante négative (*).

D'autre part, les circonférences géodésiques dont le centre est à l'infini correspondent évidemment aux *horicycles* de la géométrie de Lobatchefsky (**). En conservant cette dénomination, nous pouvons donc dire qu'un système d'horicycles concentriques se transforme, par une flexion convenable de la surface, dans le système des parallèles de la surface de révolution engendrée par la ligne aux tangentes égales.

Pour avoir une vérification de la correspondance de nos horicycles avec ceux de Lobatchefsky, observons qu'à l'angle dièdre $\frac{\sigma}{R}$ de deux plans méridiens correspondent, sur les parallèles ρ_1 et ρ_2 , les deux arcs s_1 , s_2 , donnés par les équations

$$s_1 = \sigma e^{-\frac{\rho_1}{R}}, \quad s_2 = \sigma e^{-\frac{\rho_2}{R}},$$

d'où, en appelant τ la distance $\rho_2 - \rho_1$, on tire

$$s_2 = s_1 e^{-\frac{\tau}{R}},$$

formule qui coïncide avec celle de Lobatchefsky (n° 33), sauf la différence habituelle dans le choix de l'unité.

L'expression (17) de l'élément linéaire est indépendante des coordonnées (u_0, v_0) du centre des horicycles considérés; de plus, nous avons vu que chacun des horicycles d'un système donné peut prendre la place du maximum. On en peut donc conclure que deux horicycles

(*) LIOUVILLE, Note IV à l'*Analyse appliquée, etc.*, de Monge.

(**) *Études géométriques*, n° 31 et 32.

quelconques de la surface peuvent toujours être superposés l'un à l'autre.

Par deux points de la surface pseudosphérique passent toujours deux horicycles, qui sont déterminés en menant par le milieu de la ligne géodésique de jonction une ligne géodésique perpendiculaire, dont les deux points à l'infini sont les centres des horicycles cherchés. Les arcs de ces horicycles, compris entre les points donnés, ont une même longueur, laquelle dépend uniquement de la distance géodésique des deux points. En appelant ρ cette distance, et σ la longueur de ces arcs, on trouve aisément, au moyen des équations (15) et (16) (où ρ a toutefois une signification différente),

$$\sigma = 2R \sinh \frac{\rho}{2R},$$

formule qui présente une singulière analogie avec la formule bien connue qui donne l'arc en fonction de la corde dans le cercle de rayon R (*).

VI.

Ce qui précède nous semble confirmer de tout point l'interprétation annoncée de la Planimétrie non euclidienne au moyen des surfaces de courbure constante négative.

La nature même de cette interprétation laisse facilement prévoir qu'il ne peut y avoir d'interprétation analogue, également réelle, pour la Stéréométrie non euclidienne. En effet, pour obtenir l'interprétation que nous venons d'exposer, il a fallu substituer au plan une surface irréductible au plan, c'est-à-dire dont l'élément linéaire ne peut en aucune manière se réduire à la forme

$$\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui caractérise essentiellement le plan lui-même. Si donc il nous manquait la notion des surfaces non applicables sur le plan, il nous serait impossible d'attribuer une véritable signification géométrique à la con-

(*) Voyez BATTAGLINI, *loc. cit.*, p. 273, et aussi une Note que nous avons publiée dans les *Annali di Matematica*, t. VI, 1865, p. 271.

struction développée jusqu'ici. Or l'analogie porte naturellement à croire que, s'il peut exister une construction analogue pour la Stéréométrie non euclidienne, cette construction doit se tirer de la considération d'un espace dont l'élément linéaire *ne soit pas* réductible à la forme

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

qui caractérise essentiellement l'espace euclidien. Et puisque jusqu'à présent la notion d'un espace différent de celui-là semble nous manquer, ou du moins semble dépasser le domaine de la Géométrie ordinaire, il est raisonnable de supposer que, lors même que les considérations analytiques sur lesquelles s'appuient les constructions précédentes seraient susceptibles d'être étendues du champ de deux variables à celui de trois, les résultats obtenus dans ce dernier cas ne pourraient toutefois être construits par la Géométrie ordinaire.

Cette conjecture acquiert un degré de probabilité très-voisin de la certitude, quand on entreprend effectivement d'étendre l'analyse précédente au cas de trois variables. Si l'on pose, en effet,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{R^2}{(a^2 - t^2 - u^2 - v^2)^2} [& (a^2 - u^2 - v^2) dt^2 + (a^2 - v^2 - t^2) du^2 \\ & + (a^2 - t^2 - u^2) dv^2 + 2uv du dv \\ & + 2vt dv dt + 2tu dt du], \end{aligned} \right.$$

formule dont la composition *a priori* au moyen des trois variables t, u, v est suggérée par l'inspection de celle de la formule (1) au moyen des deux variables u, v ; il est facile de s'assurer que les déductions analytiques auxquelles l'expression (1) donnait lieu subsistent intégralement pour la nouvelle expression, et que la valeur de ds donnée par celle-ci est effectivement celle de l'élément linéaire d'un espace dans lequel la Stéréométrie non euclidienne trouve une interprétation aussi complète, *analytiquement* parlant, que celle qui a été donnée pour la Planimétrie.

Mais si aux variables t, u, v on en substitue trois nouvelles ρ, ρ_1, ρ_2 , en posant

$$t = r \cos \rho, \quad u = r \sin \rho_1 \cos \rho_2, \quad v = r \sin \rho_1 \sin \rho_2,$$

$$\frac{R a dr}{a^2 - r^2} = d\rho,$$

il vient

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R}\right)^2 (d\rho_1^2 + \sin^2 \rho_1 d\rho_2^2),$$

formule qui montre que ρ , ρ_1 , ρ_2 sont des coordonnées curvilignes orthogonales de l'espace considéré.

Or M. Lamé a démontré (*) qu'en prenant comme coordonnées curvilignes des points de l'espace les paramètres ρ , ρ_1 , ρ_2 de trois familles de surfaces orthogonales, auquel cas le carré de la distance de deux points infiniment voisins est représenté par une expression de la forme

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

les trois fonctions H , H_1 , H_2 de ρ , ρ_1 , ρ_2 , qui figurent dans cette expression, sont nécessairement assujetties à satisfaire à deux systèmes distincts, chacun de trois équations aux dérivées partielles, qui ont pour types les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\rho_1 d\rho_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{dH}{d\rho_1} \frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2} \frac{dH_2}{d\rho_1}, \\ \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{dH_2}{d\rho_1} \right) + \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{d\rho_2} \right) + \frac{1}{H^2} \frac{dH_1}{d\rho} \frac{dH_2}{d\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas actuel,

$$H = 1, \quad H_1 = R \sinh \frac{\rho}{R}, \quad H_2 = R \sinh \frac{\rho}{R} \sin \rho_1,$$

et pour ces valeurs les trois premières équations sont identiquement satisfaites; mais les trois dernières ne le sont que dans le cas de $R = \infty$. Donc l'expression (18) ne peut appartenir à l'élément linéaire de l'espace euclidien ordinaire, et les formules fondées sur cette expression ne peuvent être construites au moyen des figures que nous présente la Géométrie ordinaire.

Pour compléter la démonstration de l'impossibilité d'obtenir une construction de la Stéréométrie non euclidienne sans sortir du champ de la Géométrie ordinaire, il faudrait pouvoir exclure la possibilité d'y arriver autrement que par une extension de la méthode suivie pour la Planimétrie. Nous ne prétendons pas prouver que cela soit absolu-

(*) *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, p. 76 et 78.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VI.

ment impossible; nous disons seulement que la chose nous semble très-invraisemblable.

Nous avons dit en passant que l'expression (18) sert de base à une interprétation analytique complète de la Stéréométrie non euclidienne. Cette interprétation sera exposée dans un autre Mémoire (*). Ici nous ferons observer seulement qu'en faisant dans la formule (18) $t = \text{const.}$, on obtient l'expression de l'élément linéaire d'une surface réelle de courbure constante négative; de sorte que cette surface, sur laquelle nous avons vu se vérifier les théorèmes de la Planimétrie non euclidienne, peut être considérée comme existant à la fois dans l'espace ordinaire et dans l'espace non euclidien.

NOTE I.

La réduction de l'élément linéaire d'une surface de courbure constante négative à la forme que nous avons employée dans les recherches précédentes, est fondée sur les résultats d'un Mémoire que nous avons publié dans le tome VII des *Annali di Matematica* (Rome, 1866), et qui a pour titre : « Ré-
» solution du problème de reporter les points d'une surface sur un plan, de
» manière que les lignes géodésiques soient représentées par des lignes
» droites. »

Le principe qui nous a servi à résoudre ce problème, est le suivant : Quand on fait correspondre, suivant une loi quelconque, les points d'une surface avec ceux d'un plan, on peut toujours prendre pour les deux variables indépendantes u , v , qui doivent déterminer chaque point de la surface, les coordonnées rectangulaires elles-mêmes x , y des points correspondants du plan. Cela posé, si la représentation doit être telle, qu'aux lignes géodésiques de la surface correspondent les droites du plan, il faut que l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques ait pour intégrale complète une équation linéaire entre u et v , et, par suite, il faut que cette équation différentielle se réduise simplement à la suivante

$$du d^2v - dv d^2u = 0.$$

(*) Dans un travail qui doit paraître dans les *Annali di Matematica*, et où les principes les plus généraux de la Géométrie non euclidienne sont considérés indépendamment de leurs relations possibles avec les figures réelles de la Géométrie ordinaire.

Or, de la forme générale de l'équation différentielle en question, on conclut que cela ne peut avoir lieu que lorsque les fonctions E, F, G, servant à former l'élément linéaire

$$ds \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

satisfont à quatre relations, lesquelles nous apprennent que ce même élément peut toujours être mis sous la forme

$$ds = R \frac{\sqrt{(a^2 + v^2) du^2 - 2uv du dv + (a^2 + u^2) dv^2}}{a^2 + u^2 + v^2},$$

R et a étant des constantes arbitraires. Pour reconnaître la nature des surfaces contenues dans cette forme, on a calculé l'expression de la courbure sphérique (l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux), et l'on a trouvé pour valeur de cette expression $\frac{1}{R^2}$, d'où l'on a conclu que les surfaces en question ont leur courbure sphérique constante, et par conséquent que de telles surfaces sont les seules qui admettent la représentation plane sous la condition prescrite.

Dans le Mémoire cité, nous avons supposé réelles les constantes R et a , parce que le but en vue duquel nos recherches avaient été entreprises amenait naturellement cette hypothèse. C'est pour cette raison même que nous avons observé que cet élément convient en particulier à une surface sphérique de rayon R, tangente au plan figuratif à l'origine des coordonnées, et représentée sur ce plan à l'aide de la projection centrale; auquel cas les variables u, v sont précisément les coordonnées rectangulaires de la projection du point auquel les variables se rapportent.

Mais comme les valeurs des constantes R et a sont réellement arbitraires, il est permis de les supposer imaginaires, si on le juge à propos. En effet, si l'on change ces constantes en $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, l'élément linéaire résultant correspond à une surface de courbure constante négative $-\frac{1}{R^2}$, dont les lignes géodésiques ne cessent pas d'être, comme dans le cas précédent, représentées sur le plan par des lignes droites, et, partant, par des équations linéaires en u et v . C'est de cette manière que l'on passe des formules du Mémoire cité à celles du présent travail. La seule différence essentielle entre les deux cas est que, dans le premier, les variables u, v peuvent prendre toutes les valeurs réelles, tandis que, dans le second, ces variables sont comprises entre certaines limites qu'il est facile d'assigner.

NOTE II.

En écrivant l'expression de l'élément linéaire sous la forme

$$(1) \quad ds^2 = R^2 \frac{\omega^2(du^2 + dv^2) + (u du + v dv)^2}{\omega^4},$$

on voit immédiatement que, pour passer des lignes géodésiques fondamentales primitives à deux autres menées par la même origine et orthogonales entre elles, on doit se servir des formules ordinaires pour la transformation des coordonnées rectangulaires dans le plan, quand l'origine est commune, savoir :

$$u = u' \cos \mu - v' \sin \mu, \quad v = u' \sin \mu + v' \cos \mu,$$

u', v' étant les nouvelles coordonnées, et μ l'angle que la nouvelle ligne fondamentale $v' = 0$ fait avec l'ancienne $v = 0$. En effet, de ces formules on tire

$$u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2, \quad du^2 + dv^2 = du'^2 + dv'^2,$$

et, par suite, la formule (1) devient

$$(1') \quad ds^2 = R^2 \frac{\omega'^2(du'^2 + dv'^2) + (u' du' + v' dv')^2}{\omega'^4},$$

en conservant sa forme primitive (*). La longueur d'un arc géodésique issu de l'origine conserve aussi, dans le *second* système, la forme qu'elle avait dans le *premier*, puisqu'elle est donnée par l'équation

$$(2) \quad \rho = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u'^2 + v'^2}}{a - \sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Voyons maintenant l'influence d'un changement d'origine.

Pour cela, prenons un point quelconque (u_0, v_0) , et supposons que la ligne

(*) On voit par là que les lignes géodésiques orthogonales à celles qui partent de l'origine sont représentées par les cordes du cercle-limite perpendiculaires aux diamètres qui représentent ces dernières lignes géodésiques. Réciproquement, pour que deux lignes géodésiques se coupant au point (u, v) soient représentées sur le plan auxiliaire par deux droites orthogonales, il faut que l'une ou l'autre de ces lignes géodésiques passe par l'origine ($u = v = 0$), comme on le déduit facilement de la formule donnée dans le texte pour la transformation des angles. Cette propriété devient évidente dans la projection centrale de la sphère.

fondamentale $v' = 0$ du second système passe par ce point; c'est-à-dire, supposons $\cos \mu = \frac{u_0}{r_0}$, $\sin \mu = \frac{v_0}{r_0}$, et, par suite,

$$(3) \quad u = \frac{u_0 u' - v_0 v'}{r_0}, \quad v = \frac{v_0 u' + u_0 v'}{r_0},$$

en faisant $r_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$. De là formons un troisième système de coordonnées u'' , v'' , ayant pour lignes fondamentales la ligne géodésique $v' = 0$, et l'autre ligne géodésique menée normalement à $v' = 0$, par le point (u_0, v_0) .

Traçons par le point quelconque (u', v') une ligne géodésique perpendiculaire à $v' = 0$; désignons par q sa longueur, et par p sa distance à l'origine primitive (mesurée sur la ligne $v = 0$). La formule (2) donne immédiatement

$$(4) \quad p = \frac{R}{2} \log \frac{a + u'}{a - u'},$$

tandis que de la formule (1) on tire aisément, en faisant $du' = 0$,

$$(5) \quad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u'^2} + v'}{\sqrt{a^2 - u'^2} - v'}.$$

La distance géodésique p_0 des deux origines $(u = v = 0)$, (u_0, v_0) a pour valeur

$$p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + r_0}{a - r_0},$$

en sorte que l'arc géodésique compris sur la ligne géodésique fondamentale $v' = 0$ du troisième système (laquelle est la même que $v' = 0$), entre le point (u_0, v_0) et la normale q , est donné par l'équation

$$(6) \quad p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{(a + u')(a - r_0)}{(a - u')(a + r_0)}.$$

Mais, en désignant par a_0 la constante analogue à a dans le troisième système, et observant que, dans ce système, les quantités analogues aux quantités p , q du second, sont $p - p_0$ et q , il est clair que, par analogie avec (4) et (5), on doit avoir

$$p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a_0 + u''}{a_0 - u''}, \quad q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a_0^2 - u''^2} + v''}{\sqrt{a_0^2 - u''^2} - v''}.$$

Égalant ces expressions aux expressions (6) et (5), on obtient deux relations, d'où l'on tire

$$(7) \quad u'' = \frac{a a_0 (u' - r_0)}{a^2 - r_0 u'}, \quad v'' = \frac{a_0 v_0 v'}{a^2 - r_0 u'}, \quad (w_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}).$$

La constante a , reste, à proprement parler, indéterminée, parce qu'on ne peut avoir que des équations entre les rapports $\frac{u'}{a}$, $\frac{v'}{a}$ et les rapports $\frac{u''}{a_0}$, $\frac{v''}{a_0}$. Il semble toutefois convenable de déterminer a , par la condition que, pour $u'' = 0$, c'est-à-dire pour $u' = 0$, on ait $v' = v''$, et l'on trouve alors

$$a_0 = w_0 = \sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}.$$

En conservant cette valeur, les formules précédentes donnent

$$u' = \frac{a(a_0 r_0 + a u'')}{a a_0 + r_0 u'}, \quad v' = \frac{a a_0 v''}{a a_0 + r_0 u''},$$

et ces valeurs, substituées dans (1'), donnent

$$ds^2 = R^2 \frac{(a_0^2 - v''^2) du''^2 + 2 u'' v'' du'' dv'' + (a_0^2 - u''^2) dv''^2}{(a_0^2 - u''^2 - v''^2)^2}.$$

Donc la translation de l'origine n'altère pas non plus la forme de l'élément linéaire, lequel ne diffère du premier que par la substitution de a_0 au lieu de a , changement qui n'a rien de fondamental.

Pour obtenir enfin un *quatrième* système tout à fait indépendant du premier, remplaçons les deux lignes fondamentales $u'' = 0$, $v'' = 0$ par deux nouvelles lignes géodésiques orthogonales, ayant la même origine (u_0 , v_0), ce qui se fera en posant

$$u'' = u''' \cos v - v''' \sin v, \quad v'' = u''' \sin v + v''' \cos v,$$

et nous savons encore qu'une telle substitution ne change en rien la forme de l'élément. On voit donc que la forme admise primitivement pour l'élément linéaire n'est nullement particulière à un système déterminé de lignes géodésiques fondamentales; le point ($u = v = 0$) peut être, au contraire, un point quelconque de la surface, et la ligne géodésique fondamentale $v = 0$ peut être une quelconque des lignes géodésiques menées par ce point.

En tenant compte des relations trouvées entre les coordonnées des systèmes successifs, et faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} p &= \frac{a u_0}{a_0 r_0} \cos v - \frac{v_0}{r_0} \sin v, & q &= \frac{a v_0}{a_0 r_0} \cos v + \frac{u_0}{r_0} \sin v, & r &= \frac{r_0 \cos v}{a a_0}, \\ p_1 &= \frac{a u_0}{a_0 r_0} \sin v + \frac{v_0}{r_0} \cos v, & q_1 &= \frac{a v_0}{a_0 r_0} \sin v - \frac{u_0}{r_0} \cos v, & r_1 &= \frac{r_0 \sin v}{a a_0}, \end{aligned}$$

on trouve les relations finales suivantes, entre les coordonnées u, v et les coordonnées u'', v'' ,

$$u = \frac{u_0 + pu'' - p_1 v''}{1 + ru'' - r_1 v''}, \quad v = \frac{v_0 + qu'' - q_1 v''}{1 + ru'' - r_1 v''}.$$

En considérant u, v , aussi bien que u'', v'' , comme les coordonnées rectangulaires des points correspondants de deux plans, ces formules expriment une dépendance homographique entre les plans eux-mêmes, circonstance dont il a été parlé dans le Mémoire cité dans la Note I.

Si l'on compare l'expression primitive de l'élément linéaire en fonction de u, v , avec l'expression finale en fonction de u'', v'' , on trouve que ces deux expressions peuvent être rendues identiques, en posant

$$\frac{u}{a} = \pm \frac{u''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm \frac{v''}{a_0}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{u}{a} = \pm \frac{v''}{a_0}, \quad \frac{v}{a} = \pm \frac{u''}{a_0},$$

le choix du signe étant arbitraire dans chaque formule. Cela démontre que la surface pseudosphérique, considérée comme flexible et inextensible, peut se superposer à elle-même, de manière qu'un quelconque de ses points (u, v) vienne occuper la position d'un autre point quelconque ($u = v = 0$), et qu'une quelconque des lignes géodésiques partant du premier point (par exemple, la ligne $v'' = 0$) coïncide dans toute son étendue avec une quelconque des lignes géodésiques partant du second (par exemple, avec $v = 0$). De plus, l'ambiguïté des signes fait voir que la superposition de deux angles géodésiques de même grandeur, formés autour de ces deux points, peut s'opérer aussi bien directement qu'inversement. Par exemple, l'angle droit des lignes géodésiques $u'' = 0$, $v'' = 0$, peut être appliqué sur celui des lignes $u = 0$, $v = 0$, soit en faisant coïncider $u'' = 0$ avec $u = 0$, et $v'' = 0$ avec $v = 0$, soit aussi en faisant coïncider $u'' = 0$ avec $v = 0$, et $v'' = 0$ avec $u = 0$. Donc toute portion de surface peut être superposée, tant directement qu'inversement, sur une partie quelconque de la surface elle-même; par conséquent, s'il se trouve sur cette portion une figure (par exemple, un triangle géodésique), celle-ci pourra subir sur la surface tous les déplacements qu'une figure plane peut subir sur son plan, sans jamais cesser d'être égale à elle-même. Naturellement, cette égalité ne doit se rapporter qu'aux longueurs des lignes et à la grandeur des angles, puisque la courbure *absolue* des lignes n'entre point ici en considération (*).

(*) L'égalité *relative* dont il est question serait une égalité *absolue* pour un être dont les conceptions géométriques ne sortiraient pas du champ à deux dimensions de la surface considérée, comme les nôtres ne sortent pas du champ à trois dimensions de l'espace ordinaire.

La propriété que nous venons de démontrer était déjà connue, mais la démonstration précédente nous semble présenter la rigueur qu'exige la nature de notre sujet. Du reste, le théorème de Gauss établit que, si la propriété en question peut appartenir à une surface, cette surface est nécessairement une de celles dont la courbure sphérique est constante.

N'oublions pas de noter un résultat utile, qui se déduit facilement de quelques-unes des formules précédentes. Le cercle géodésique qui a pour centre le point (u_0, v_0) , et pour rayon ρ , est représenté, dans le troisième système, par l'équation

$$u''^2 + v''^2 = a_0^2 \tanh^2 \frac{\rho}{R},$$

comme cela résulte de la formule (5) du texte. Mais, des formules (7) de la présente Note, à cause de $a_0 = r_0 = \sqrt{a^2 - r_0^2}$, on tire

$$u''^2 + v''^2 = \left(\frac{a_0}{a^2 - r_0 u'} \right)^2 \{ a^2 [(u' - r_0)^2 + v'^2] - (r_0 v')^2 \},$$

et les formules (3) donnent d'ailleurs

$$u' = \frac{u u_0 + v v_0}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0 v - u v_0}{r_0},$$

d'où

$$u' - r_0 = \frac{u_0(u - u_0) + v_0(v - v_0)}{r_0}, \quad v' = \frac{u_0(v - v_0) - v_0(u - u_0)}{r_0};$$

donc enfin

$$\frac{a^2 [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2] - (u_0 v - u v_0)^2}{(a^2 - u u_0 - v v_0)^2} = \tanh^2 \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation fait connaître la distance géodésique ρ de deux points quelconques (u, v) , (u_0, v_0) . Quand ces points sont infiniment voisins, elle ramène immédiatement à l'expression de l'élément linéaire, d'où nous sommes partis.

En introduisant la fonction \cosh au lieu de \tanh , l'équation précédente prend la forme plus élégante

$$\frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh \frac{\rho}{R}.$$



DU
PASSAGE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL
EN 1874

ET DU
CALCUL DE LA PARALLAXE DU SOLEIL,

PAR M. BACH,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

1. Les passages des planètes inférieures sur le disque du Soleil se produisent quand ces astres, dans leurs conjonctions inférieures, viennent se placer entre la Terre et le Soleil. Si, à cette époque, la planète a une faible latitude, elle sera sensiblement en ligne droite avec la Terre et le Soleil, et l'observateur la verra se dessiner sur le disque solaire suivant une tache noire et ronde dont l'étendue n'est jamais assez considérable pour affaiblir d'une manière sensible l'éclat de l'astre du jour.

Le phénomène des passages a la plus grande analogie avec les éclipses de Soleil; la seule différence, c'est que la Lune est remplacée par la planète, dont le diamètre est beaucoup plus petit. Nous nous occuperons ici spécialement du prochain passage de Vénus, qui aura lieu le 8 décembre 1874. M. Airy a déduit des Tables de Vénus, perfectionnées par M. Le Verrier, les éléments nécessaires au calcul de ce passage. Ces éléments, rapportés au temps moyen de Greenwich, se

trouvent dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 25 juillet 1861; nous les rappelons ici :

Conjonction en \mathcal{A} temps moyen de Greenwich, 8 décembre.	16 ^h 59 ^m 13 ^s , 2
Ascension droite de \odot et de ♀	255° 52' 51", 6
Déclinaison du ♀	— 22° 35' 7", 7
Déclinaison du \odot	— 22° 49' 22", 4
Mouvement horaire de ♀ en \mathcal{A}	— 93", 95
Mouvement horaire de ♀ en déclinaison ..	+ 47", 73
Mouvement horaire du \odot en \mathcal{A}	+ 164", 71
Mouvement horaire du \odot en déclinaison ..	— 14", 86
Demi-diamètre de ♀	— 31", 41
Demi-diamètre du \odot	16' 14", 98
Parallaxe horizontale de ♀	32", 41
Parallaxe horizontale du \odot	8", 71

Aperçu général sur les passages de Vénus.

2. La longitude héliocentrique du nœud ascendant de Vénus étant de 75 degrés environ, il est évident que, si la Terre est en conjonction avec le nœud ascendant, la longitude géocentrique de ce point sera $180^\circ + 75^\circ = 255^\circ$. La longitude géocentrique du nœud descendant sera, dans les mêmes conditions, de 75 degrés; mais, à cause de l'inclinaison de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique, les passages ne peuvent se produire que dans les conjonctions inférieures, voisines des nœuds; ils n'ont lieu par conséquent que dans les conjonctions pour lesquelles la longitude du Soleil est elle-même voisine de 255 ou de 75 degrés. Ces longitudes solaires répondent aux mois de décembre et de juin, qui sont en effet les seuls où l'on observe des passages de Vénus. Les passages au nœud ascendant auront lieu en décembre; les passages au nœud descendant auront lieu en juin.

Connaissant la durée de la révolution synodique de Vénus ou le temps que met la planète à revenir en conjonction avec le Soleil, durée qui est de 584 jours, il est facile de trouver toutes les conjonctions : on choisit celles qui se produisent dans le voisinage des nœuds, c'est-à-dire dans les mois de décembre et de juin, et, en les calculant avec soin, on reconnaîtra si la latitude géocentrique, à la conjonction, n'excède pas le demi-diamètre apparent du Soleil, et, dans ce cas, Vénus pourra passer sur le disque solaire.

Dans une révolution synodique de 584 jours, le Soleil parcourt sur l'écliptique une circonférence entière plus 216 degrés; ainsi, une conjonction ayant lieu en un certain point de l'écliptique, la première conjonction qui suivra aura lieu à 216 degrés plus loin; la seconde, à 432 degrés plus loin, etc., et la cinquième aura lieu à $216^{\circ} \times 5 = 360^{\circ} \times 3$ du point de départ, c'est-à-dire qu'elle répondra à la même longitude que la première. Dans l'intervalle de cinq conjonctions, il s'est écoulé $584 \times 5 = 2920 = 365 \times 8$, c'est-à-dire 8 années de 365 jours. Supposons, d'après cela, qu'il y ait eu une conjonction inférieure, quand la planète était dans son nœud, à cette conjonction répondra un passage; 8 ans après, la conjonction aura lieu sensiblement dans les mêmes circonstances, avec cette différence, que la planète aura cette fois une latitude appréciable, mais qui sera encore assez petite pour que le passage se produise. Après une nouvelle période de 8 ans, la latitude de la planète à la conjonction aura encore augmenté, et cette augmentation sera alors suffisante pour empêcher le passage d'avoir lieu, de sorte qu'il n'y aura jamais trois passages de suite dans une période de 16 ans. Il s'écoule alors un intervalle de 105 ou de 121 ans, après lequel il y a un passage, puis un autre 8 ans plus tard. On trouve dans l'*Astronomie théorique et pratique* de Delambre, t. II, p. 473, une Table des passages de Vénus depuis l'an 900 de notre ère jusqu'à l'an 3000. Durant cette période de 21 siècles, il y a trente-cinq passages. Ceux du dernier siècle ont eu lieu le 5 juin 1761 et le 3 juin 1769; ceux du siècle actuel s'observeront le 8 décembre 1874 et le 6 décembre 1882.

3. Les passages de Vénus offrent une observation directe du nœud de la planète, ce qui est précieux pour le contrôle des Tables; mais ils ont une bien autre importance encore : on peut en effet les utiliser pour la détermination de la parallaxe du Soleil, de laquelle dépend l'évaluation de la distance de la Terre à cet astre, et, par suite, d'après la troisième loi de Keppler, de la distance de toutes les planètes au Soleil.

Keppler annonça le premier le passage de Vénus qui ait été observé, mais il l'avait simplement signalé comme un fait curieux resté inaperçu jusqu'à lui. C'est Halley qui, en faisant connaître aux astronomes les passages de 1761 et de 1769, montra, le premier, tous les avantages

qu'ils pourraient en tirer pour la détermination de la parallaxe du Soleil; il indiqua même les lieux de la Terre les plus favorables pour ce genre d'observations. Malheureusement il se trompa dans ses calculs, et toute la partie numérique de son travail dut être reprise. Divers calculateurs se chargèrent de cette tâche : nous citerons entre autres Trébuchet, astronome français, qui releva le premier l'erreur commise par Halley.

Ces passages du dernier siècle sont fameux dans l'histoire de l'Astronomie; la plupart des Souverains et des Académies de l'Europe organisèrent des voyages dans des lieux éloignés et désignés d'avance où l'effet de la parallaxe sur les apparences du phénomène fût le plus considérable, et ces voyages, surtout en 1769, s'accomplirent à la satisfaction générale des astronomes du temps. La discussion des observations relatives à ce passage de 1769, reprise en 1835 par M. Encke, a donné pour la parallaxe du Soleil $8'',57$. On regardait ce nombre, il y a quelques années, comme suffisamment exact, bien qu'on n'en connût pas d'une manière précise le degré d'approximation. Des considérations théoriques ont fait penser, dans ces derniers temps, qu'il était notablement trop petit; il serait en effet de $8'',95$, d'après M. Le Verrier.

Lors de l'opposition de Mars, qui s'est produite, en 1862, dans des conditions exceptionnellement favorables, la combinaison d'observations simultanées faites à Pulkowa et au Cap a donné $8'',964$; la combinaison d'observations faites à Greenwich et en Australie a donné $8'',932$. La moyenne des deux résultats, $8'',95$, coïncide avec le nombre adopté par M. Le Verrier, t. IV, p. 101, des *Annales de l'Observatoire*.

M. Pauwalki, astronome à Berlin, a, dans sa Thèse inaugurale, intitulée : *Neue Untersuchung des Venus-Durchganges von 1769, zur Bestimmung der Sonnen-Parallaxe*, discuté de nouveau les passages observés en 1769, et il trouve, en basant ses calculs sur les déterminations récentes des longitudes des lieux d'observation, $8'',86$. C'est aussi ce que l'on trouve en admettant, comme cela résulte des éclipses des satellites de Jupiter, que la lumière emploie $497^s,91$ pour parcourir la distance du Soleil à la Terre, et en adoptant d'ailleurs pour la vitesse de la lumière 298 000 kilomètres par seconde, d'après Léon Foucault.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, dans l'état actuel de la science, la parallaxe du Soleil n'est connue qu'à $\frac{1}{30}$ de sa valeur environ. Espérons que l'étude approfondie des passages de 1874 et 1882 permettra, en donnant gain de cause à la théorie, de resserrer considérablement les limites de l'erreur qui affecte un des éléments les plus importants, mais aussi un des plus délicats à connaître de l'Astronomie.

Calcul des passages par la méthode des projections.

1. Nous nous occuperons d'abord du passage relatif au centre de la Terre, qui se trouve indiqué dans les Éphémérides. Cela revient à négliger les effets de parallaxe, dont nous apprendrons plus tard à tenir compte.

Le problème à résoudre est celui-ci : *Étant donnée l'heure de la conjonction en ascension droite de Vénus et du Soleil, les mouvements horaires des deux astres pour cette époque, déterminer l'heure de l'entrée et de la sortie de la planète, et la plus courte distance de son centre au centre du disque solaire.*

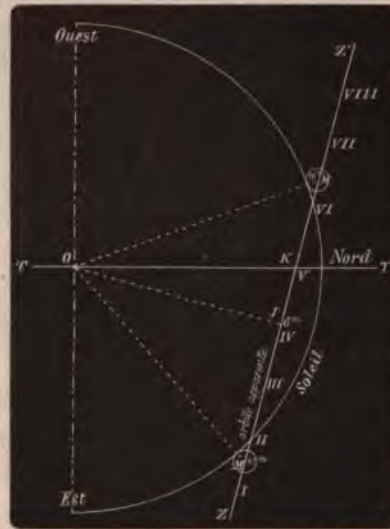
Préliminaires et procédé graphique. — Le Soleil et la planète se déplacent tous deux sur la sphère céleste; le mouvement du Soleil a lieu d'Occident en Orient, et celui de la planète qui est rétrograde dans le voisinage de la conjonction inférieure a lieu d'Orient en Occident. Cela posé, considérons un passage de décembre; à cette époque, le mouvement du Soleil en déclinaison est austral, mais, puisque la planète atteint alors son nœud ascendant, elle passe du Sud au Nord de l'écliptique; son mouvement en déclinaison est donc boréal, c'est-à-dire de sens inverse à celui du Soleil. En juin, c'est le mouvement du Soleil en déclinaison qui est boréal, et celui de la planète qui est austral.

Quant au mouvement de la planète en ascension droite, il est toujours rétrograde vers la conjonction inférieure. Or, il est permis de regarder le Soleil comme fixe, si l'on donne à la planète le mouvement relatif convenable. Le mouvement relatif de Vénus en ascension droite sera égal à la somme des mouvements des deux astres, et se comptera d'Orient en Occident. Le mouvement relatif en déclinaison sera aussi

égal à la somme des mouvements : il sera boréal ou austral suivant qu'il s'agira d'un passage de décembre ou d'un passage de juin.

Regardons, d'après cela, le Soleil comme fixe, et imaginons menée la ligne qui va du centre de la Terre au centre du Soleil; prenons pour plan horizontal de projection le plan mené par le centre de la Terre perpendiculairement à cette droite, et pour plan vertical le méridien de la conjonction qui coupera le premier suivant la ligne de terre TT (*fig. 1*). Supposons ensuite que l'on mène, à la distance de la planète

Fig. 1.



à la Terre, un plan parallèle au plan horizontal de projection. La route apparente de la planète, pendant la durée du passage, sera, sans erreur appréciable, une droite située dans ce plan.

Le Soleil s'y projettera en perspective suivant un cercle, et dans l'épure que nous allons expliquer, nous projetterons en vraie grandeur sur le plan horizontal la perspective du Soleil et l'orbite relative.

Cela posé, décrivons un cercle de rayon arbitraire; nous le prendrons d'un décimètre, il représentera le disque solaire. La Terre, réduite à un point, est au centre de ce cercle; la ligne TT détermine le méridien de la conjonction.

Figurons actuellement sur le plan de projection l'orbite relative de

la planète. Cette orbite étant sensiblement rectiligne, il suffira de deux conditions pour la déterminer, et nous allons supposer, dans ce qui va suivre, qu'il s'agisse du passage du 8 décembre 1874.

On trouve (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 25 juillet 1861) :

$$D' \text{ Déclinaison } \varphi = 22^{\circ} 35' 7'', 7 \text{ A},$$

$$D \text{ Déclinaison } \odot = 22^{\circ} 49' 22'', 4 \text{ A}.$$

La différence des déclinaisons est $14' 14'', 7$: cela veut dire qu'à l'instant de la conjonction Vénus est à $14' 14'', 7$ au Nord du Soleil; ayant choisi sur la ligne TT la direction du Nord, on prendra, en allant dans ce sens, une longueur OK, répondant à $14' 14'', 7$, distance des centres des deux astres.

Le demi-diamètre apparent du Soleil à la conjonction est $16' 14'', 98$, et, puisque nous l'avons représenté par un décimètre, on calculera OK par la proportion

$$\frac{OK}{1^d} = \frac{14' 14'', 7}{16' 14'', 98} = \frac{854,7}{974,98} = 0,877.$$

Ainsi $OK = 0^d, 877$.

Prenant OK égal à cette longueur, le point K ainsi obtenu sera un point de l'orbite relative de Vénus. Cette orbite sera complètement déterminée si l'on en connaît un second point, ou si l'on connaît l'angle qu'elle fait avec TT.

5. Nous avons

$$\begin{array}{lcl} \text{Mouvement horaire } \varphi & \left\{ \begin{array}{ll} \text{en ascension droite...} & 93'', 95 \text{ O}, \\ \text{en déclinaison...} & 47'', 73 \text{ B}; \end{array} \right. \\ \text{Mouvement horaire } \odot & \left\{ \begin{array}{ll} \text{en ascension droite...} & 146'', 71 \text{ E}, \\ \text{en déclinaison...} & 14'', 80 \text{ A}. \end{array} \right. \end{array}$$

De ces données résulte un mouvement relatif en ascension droite d'Orient en Occident, égal à la somme des mouvements. Désignons-le par h :

$$h = 93'', 95 + 146'', 71 = 258'', 66 \text{ O}.$$

Quant au mouvement relatif en déclinaison, il sera boréal et égal à

la somme des mouvements de la planète et du Soleil. Désignons-le par δ :

$$\delta = 47'',73 + 14'',80 = 62'',53 \text{ B.}$$

Chacune de ces quantités peut d'ailleurs être estimée en parties du rayon du cercle qui représente le disque solaire, c'est-à-dire en décimètres. Elles seront $\frac{h}{d}$ et $\frac{\delta}{d}$, d étant le demi-diamètre apparent du Soleil.

Veut-on connaître la position de la planète sur son orbite relative une heure après la conjonction, on remarquera d'abord qu'elle s'avance vers le Nord de la quantité $\frac{\delta}{d}$. Quant au chemin parcouru vers l'Ouest, il serait $\frac{h}{d}$, si la planète était à l'équateur; mais puisqu'elle a la déclinaison D' , le déplacement horaire parallèlement à l'équateur est $\frac{h}{d} \cos D'$.

$\frac{\delta}{d}$ et $\frac{h}{d} \cos D'$ sont les coordonnées d'un second point de l'orbite; en le joignant avec le point K, on aura cette orbite.

Au lieu de déterminer un second point de l'orbite, on peut calculer l'angle α qu'elle fait avec la ligne de terre. Il sera donné par la formule

$$\tan \alpha = \frac{h \cos D'}{\delta}.$$

L'angle α (*fig. 1*, p. 294) est l'angle OKZ; il n'y a pas à se tromper sur le sens où il doit être compté, car la planète se dirige du Sud-Est au Nord-Ouest; elle abordera le disque solaire par la partie orientale, et l'abandonnera par la partie occidentale.

D'après les valeurs de D' , h et δ ,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{258,66}{62,53} \cos 22^\circ 35' 7'',7, \\ \alpha &= 75^\circ 19' 40''. \end{aligned}$$

Faisant $OKZ = \alpha$, la ligne ZKZ' sera l'orbite de Vénus. Il s'agit actuellement de trouver les positions qu'occupe la planète aux heures voisines de la conjonction.

Le chemin que parcourt la planète sur son orbite relative, dans une

heure, s'obtient en divisant le mouvement horaire relatif en déclinaison par $\cos \alpha$; il a pour expression

$$\frac{\delta}{d \cos \alpha} = 0^d, 253.$$

6. Rien de plus facile que de trouver la position de Vénus à une certaine heure, à 16 heures par exemple, ce qui répond au 9 décembre, à 4 heures du matin. On compte le temps écoulé depuis 16 heures jusqu'à la conjonction; il est

$$16^h 59^m 13^s, 2 - 16^h = 59^m 13^s, 2 = 3553^s, 2.$$

Le chemin parcouru dans ce temps est donné par la proportion

$$\frac{x}{0^d, 253} = \frac{3553, 2}{3600},$$

$$x = 0^d, 250.$$

On prendra donc, à partir du point K sur la direction KZ, et en allant vers l'Est, une longueur égale à $0^d, 250$, et l'on marquera à l'extrémité le n° XVI ou mieux IV, en adoptant le temps civil. Portant ensuite dans les deux sens des longueurs égales à $0^d, 253$, c'est-à-dire au chemin parcouru dans une heure, on obtiendra les divisions

III, IV, V, VI, ...,

qui indiquent les positions de la planète aux mêmes heures.

Ayant les positions d'heure en heure, on les aura, par des subdivisions, de quart d'heure en quart d'heure, de cinq minutes en cinq minutes, etc.

Pour connaître l'heure de l'entrée et celle de la sortie, on décrira du point O une circonférence avec un rayon égal à la somme des demi-diamètres apparents du Soleil et de la planète. Le demi-diamètre du Soleil, $16' 14'', 98$, est représenté par 1 décimètre; celui de Vénus, $31'', 41$, sera représenté par $0^d, 032$; le rayon du cercle à décrire est donc $1^d, 032$. La circonférence de cercle coupe l'orbite en deux points M et M', qui répondent aux divisions marquées :

$$2^h 47^m \text{ et } 6^h 26^m.$$

Pour connaître l'heure du milieu du phénomène, on regardera la division à laquelle répond le pied de la perpendiculaire menée du centre à l'orbite, ou bien l'on prendra la moyenne des heures d'entrée et de sortie; à cette heure répond la plus courte distance des centres qu'on obtiendra en mesurant la longueur l de la perpendiculaire, et en la convertissant en angle.

La *fig. 1*, p. 294, donne $l = 0^d, 863$. On posera la proportion

$$\frac{x}{974'', 98} = \frac{0,863}{1},$$

et il viendra pour la distance angulaire des centres

$$x = 13' 38''.$$

Résumé.

		Heure de Greenwich.	Heure de Paris.
Le 9 décembre, temps civil.	Entrée.....	1 ^h 47 ^m matin.	1 ^h 56 ^m
	Milieu du passage..	4 6 »	4 15
	Sortie.....	6 26 »	6 35

Plus courte distance des centres, 13' 38''.

Le passage sera invisible à Paris et à Londres.

7. *Procédé analytique.* — Les constructions qui précèdent peuvent facilement se traduire en formules. Nous avons (*fig. 1*, p. 294)

$$OK = D' - D,$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{h \cos D'}{\delta}.$$

Soit I le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur l'orbite; le triangle OKI donne

$$KI = (D' - D) \cos \alpha.$$

D'ailleurs (n° 5) le chemin que décrit la planète dans une heure sur son orbite relative étant $\frac{\delta}{\cos \alpha}$, on aura le temps écoulé depuis le milieu du passage jusqu'à la conjonction, en divisant KI par le mouvement

horaire; on obtient ainsi pour ce temps

$$\frac{D' - D}{\delta} \cos^2 \alpha.$$

Soit t l'heure de la conjonction en ascension droite pour un certain lieu, Greenwich par exemple, et t' celle du milieu du passage, cette heure sera évidemment donnée par la formule

$$t' = t - \frac{D' - D}{\delta} \cos^2 \alpha.$$

La plus courte distance des centres, ou la valeur de OI en angle, est

$$OI = (D' - D) \sin \alpha.$$

Cherchons actuellement l'heure de l'entrée et celle de la sortie. Appelons d' le demi-diamètre de Vénus, d étant celui du Soleil, et considérons Vénus à l'instant de l'entrée ou du premier contact extérieur; son centre étant alors en M , nous aurons

$$MI = (d + d') \cos \varphi,$$

l'angle φ étant donné par la formule

$$\sin \varphi = \frac{OI}{d + d'} = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d + d'}.$$

Le temps nécessaire pour parcourir MI est évidemment

$$\frac{MI \cos \alpha}{\delta} = \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta},$$

d'où résulte qu'en désignant par t_1 l'heure de l'entrée, nous aurons

$$t_1 = t' - \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta}.$$

Il n'est pas plus difficile de trouver l'heure de la sortie ou du dernier contact extérieur; en l'appelant t_2 , on a

$$t_2 = t' + \frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta}.$$

Il est aisé de voir que les heures du premier et du dernier contact intérieur ont pour expression

$$t' - \frac{(d - d') \cos \varphi' \cos \alpha}{\delta},$$

$$t' + \frac{(d - d') \cos \varphi' \cos \alpha}{\delta},$$

φ' étant un angle auxiliaire donné par la formule

$$\sin \varphi' = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d - d'}.$$

8. *Application.* — Nous avons déjà trouvé

$$h = 258'', 66 \text{ O},$$

$$\delta = 62'', 53 \text{ B},$$

$$\alpha = 75^\circ 19' 40''.$$

Nous prendrons, pour appliquer les formules qui précèdent,

$$D' = -22^\circ 35' 7'', 7,$$

$$D = -22^\circ 49' 22'', 4.$$

Nous mettons le signe —, puisque les déclinaisons sont australes, et nous trouvons

$$D' - D = 14' 14'', 7 = 854'', 7,$$

$$\frac{D' - D}{\delta} \cos^2 \alpha = 52^m 37^s,$$

$$t' = 16^h 59^m 13^s - (52^m 37^s) = 16^h 6^m 36^s.$$

Ainsi le milieu du passage qui répond à la plus courte distance des centres a lieu à $16^h 6^m 36^s$, et cette plus courte distance est

$$(D' - D) \sin \alpha = 826'', 8 = 13' 46'', 8.$$

Pour obtenir l'heure de l'entrée et de la sortie, on calculera l'angle φ :

$$\sin \varphi = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d + d'},$$

$$d + d' = 1006'', 39,$$

$$\varphi = 55^\circ 14' 36''.$$

On trouvera ensuite

$$\frac{(d + d') \cos \varphi \cos \alpha}{\delta} = 2^h 19^m 26^s,$$

et, d'après cela,

Entrée (heure de Greenwich), à $16^h 6^m 36^s - (2^h 19^m 26^s) = 13^h 47^m 10^s$,

Sortie id. à $16^h 6^m 36^s + 2^h 19^m 26^s = 18^h 26^m 2^s$.

Les résultats fournis par la construction sont sensiblement d'accord avec ceux que donne le calcul.

Pour obtenir l'heure du premier et du dernier contact intérieurs, on calculera l'angle φ' :

$$\sin \varphi' = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d - d'},$$

$$d - d' = 943'', 57,$$

$$\varphi' = 61^\circ 11' 48''.$$

On trouvera ainsi

$$\frac{(d - d') \cos \varphi' \cos \alpha}{\delta} = 1^h 50^m 29^s,$$

et, d'après cela,

Premier contact intérieur, à $16^h 6^m 36^s - (1^h 50^m 29^s) = 14^h 16^m 7^s$,

Dernier contact intérieur, à $16^h 6^m 36^s + (1^h 50^m 29^s) = 17^h 57^m 5^s$.

9. Dans ce qui précède, nous avons négligé la parallaxe de la planète, ou, en d'autres termes, nous avons fait abstraction des dimensions de la Terre, l'observateur étant toujours supposé placé au centre. Nous allons maintenant y avoir égard, et nous résoudrons d'abord les deux problèmes qui vont suivre, dont on comprendra bientôt toute l'importance.

Déterminer le lieu de la Terre qui, le premier, observera l'entrée de la planète au coucher du Soleil, et celui qui, le dernier, en verra la sortie au lever de cet astre.

Soit (*fig. 2*, p. 302) T la Terre, S le centre du Soleil supposé immobile, XX le plan mené perpendiculairement à la ligne ST, qui joint les centres du Soleil et de la Terre. Ce plan contient la ligne droite ZZ', que la planète dans le voisinage de la conjonction décrit d'Orient en Occi-

dent en vertu de son mouvement relatif. Imaginons le cône ayant pour sommet le point S et circonscrit à la Terre, il la touche suivant le cercle BAB, que nous appellerons *cercle d'horizon*, et coupe le plan XX

Fig. 2.



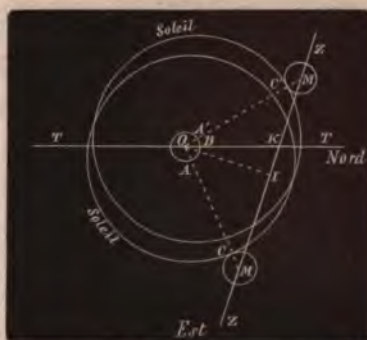
suivant le cercle *bab*, dont le rayon est vu de la Terre sous un angle égal à la différence des parallaxes de la planète et du Soleil. Vénus et la projection du Soleil sur le plan XX sont vues de la Terre sous leurs diamètres apparents. Cela posé, imaginons que la planète occupe une position M telle que l'on ait

$$OM = Oa + ac + cM,$$

Oa étant la différence des parallaxes des deux astres, Oc le demi-diamètre apparent du Soleil, et cM le demi-diamètre apparent de la planète. Le cercle décrit du point a comme centre, et qui n'est autre que la projection du Soleil sur le plan XX pour l'observateur placé au point A de la Terre, sera tangent au disque de la planète, et de ce point A, qui s'obtient en prolongeant Sa , on verra un contact à l'horizon. Ce sera un contact au coucher, car aussitôt après, le point A, qui se déplace de l'Ouest à l'Est en vertu du mouvement diurne, entre dans l'hémisphère non éclairé, et l'on voit sans peine que le contact aura lieu à l'extrémité orientale du diamètre vertical du Soleil.

Faisons actuellement la figure en projection. Soit TT (*fig. 3*) la ligne de terre, et décrivons, du point O comme centre, un cercle avec un rayon égal à la différence des parallaxes de la planète et du Soleil.

Fig. 3.



Représentons cette différence par p , et imaginons d'ailleurs que l'orbite relative ZZ' ait été tracée comme il a été dit (n° 5).

Du point O comme centre avec le rayon $p + d + d'$ décrivons un arc de cercle qui coupe ZZ' au point M du côté de l'Orient. Joignons OM qui rencontre la circonférence O en A. Le cercle décrit du point A comme centre avec le rayon d et celui qui est décrit du point M comme centre avec le rayon d' seront tangents extérieurement : le premier représente le Soleil, le second la planète, et le point A déterminera le lieu qui verra le premier contact au coucher.

10. *Calcul de l'instant du premier contact au coucher.* — Le point K représentant la position de la planète à la conjonction, cherchons le temps qu'elle mettra pour parcourir la distance MK. Or, nous avons dans la *fig. 3*, comme dans la *fig. 1*, p. 294,

$$OI = (D' - D) \sin \alpha.$$

Posons

$$\sin \gamma = \frac{D' - D}{p + d + d'} \sin \alpha,$$

et le triangle OMK donnera la proportion

$$\frac{MK}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{p + d + d'}{\sin \alpha}.$$

Si l'on divise MK par le mouvement de la planète ou par $\frac{\delta}{\cos \alpha}$, nous aurons :

$$\theta = \frac{(p + d + d') \sin(\alpha + \gamma)}{\delta \tan \alpha}.$$

Cette valeur de θ est le temps écoulé depuis l'instant où le passage commence jusqu'à celui de la conjonction, et l'heure de l'entrée sera $t - \theta$, t désignant, comme nous le savons, l'heure de la conjonction en ascension droite.

11. *Coordonnées géographiques du point A.* — Revenons à la *fig. 2*, p. 302, et considérons le point A de la Terre déterminé en prolongeant Sa. BAB sera, sans erreur appréciable, un grand cercle de la sphère terrestre, et l'arc PA du triangle sphérique PAB sera le complément de la latitude. On connaît, dans ce triangle, le côté BP, qui est égal à la déclinaison du Soleil, et le côté BA, qui, d'après la *fig. 3*, p. 303, est égal à $180^\circ - \alpha - \gamma$. Nous aurons donc, en désignant par λ la latitude du point A,

$$\cos PA = \sin \lambda = \cos D \cos(180^\circ - \alpha - \gamma).$$

Pour trouver la longitude de ce point, nous ferons observer que l'on connaît (n° 10) l'heure de l'entrée. On convertira le temps moyen en temps vrai (*), et l'on en déduira l'angle horaire du Soleil à l'instant du premier contact, ou l'angle du méridien de Greenwich avec celui de la conjonction : nous désignerons cet angle par Q. Le triangle PAB (*fig. 2*, p. 302) donne

$$\tan(180^\circ - \alpha - \gamma) = \sin D \tan P.$$

L'angle horaire φ se compte de l'Est à l'Ouest, à partir de Greenwich, et le méridien du point A fait avec le méridien de la conjonction l'angle P, en allant vers l'Est; donc finalement la longitude du point A sera $P - Q$, augmenté, s'il est nécessaire, de 360 degrés. Il ne faut pas perdre de vue que l'on compte ici les heures de 0 à 24 ou les angles horaires de 0 à 360.

En faisant une construction analogue sur la partie occidentale de la

(*) Voyez n° 22.

fig. 3, p. 303, on trouvera en A' le lieu de la Terre qui verra le dernier contact au lever, et ce contact aura lieu à l'extrémité occidentale du diamètre vertical du Soleil. Le temps écoulé depuis la conjonction jusqu'au dernier contact extérieur est donné par la formule

$$\theta' = \frac{(p + d + d') \sin(\alpha - \gamma)}{\delta \tan \alpha}.$$

La latitude du point A' sera donnée par l'équation

$$\sin \lambda' = \cos D \cos(\alpha - \gamma).$$

Il reste à trouver la *longitude* de ce point.

De l'heure du dernier contact, on conclut l'angle horaire du Soleil, que nous désignerons par Q'. Le méridien de la conjonction sera dès lors à Q' degrés à l'Est de Greenwich. Si maintenant on désigne par P' l'angle du méridien de A' avec le méridien de la conjonction, nous aurons

$$\tan(\alpha - \gamma) = \sin D \tan P',$$

et le point A', qui voit le dernier contact au lever, sera à $360 - P' - Q'$ degrés à l'Est de Greenwich.

Le temps écoulé depuis l'entrée au coucher jusqu'à la sortie au lever est

$$T = \frac{(p + d + d')[(\sin \alpha + \gamma) - \sin(\alpha - \gamma)]}{\delta \tan \alpha} = \frac{2(p + d + d') \sin \gamma \cos \alpha}{\delta \tan \alpha}.$$

Ce sera évidemment la plus longue durée du phénomène.

12. *Trouver le lieu qui, le dernier, verra l'entrée au lever, et celui qui, le premier, verra la sortie au coucher.*

Du point O comme centre avec le rayon $d + d' - p$, décrivons un cercle qui rencontre l'orbite relative en deux points N et N' (*fig. 4*, p. 306). Joignons NO, qui rencontre le cercle d'horizon en B; de ce point, avec le rayon d , décrivons une circonférence, elle représente le disque solaire; décrivons-en une seconde du point N avec le rayon d' , elle représente la planète entamant le disque solaire en D. Le point B est celui qui, le dernier, verra l'entrée au lever, et l'impression aura lieu à l'extrémité orientale du diamètre vertical du Soleil. A vrai dire, l'en-

trée est invisible, puisqu'elle se fait au-dessous du centre du disque solaire, à l'instant où ce centre atteint l'horizon du point B.

Fig. 4.



On trouvera de la même manière la position du point B', qui verra la sortie au coucher.

En désignant par θ , le temps écoulé depuis l'arrivée de la planète au point N jusqu'à la conjonction, on trouvera sans peine

$$\theta = \frac{(d + d' - p)(\sin \alpha + \gamma_1)}{\delta \tan \alpha},$$

l'angle γ_1 étant donné par la formule

$$\sin \gamma_1 = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d + d' - p}.$$

Le temps θ' écoulé depuis la conjonction jusqu'à l'arrivée en N' est

$$\theta' = \frac{(d + d' - p) \sin(\alpha - \gamma_1)}{\delta \tan \alpha},$$

et la durée totale est

$$T_1 = \frac{2(d + d' - p) \cos \alpha \sin \gamma_1}{\delta \tan \alpha}.$$

Cette valeur T_1 est la durée minimum du passage.

Les coordonnées géographiques des points B et B' se trouveront comme il a été dit au n° 11.

On pourrait, au lieu des contacts extérieurs, considérer les contacts

intérieurs, soit au coucher, soit au lever; nous nous dispenserons d'écrire ici les formules relatives à ce cas.

13. *Application au passage de 1874.* — Les données à joindre à celles qui ont déjà été employées dans les calculs précédents sont

$$\text{Parallaxe } \odot = 32'',44,$$

$$\text{Parallaxe } \ominus = 8'',71;$$

d'où

$$p = 23'',73.$$

Heure de l'entrée au coucher. — Nous avons (n° 10)

$$\sin \gamma = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{p + d + d'},$$

$$d + d' + p = 1030'',12,$$

$$\gamma = 53^{\circ} 23' 3'',$$

$$\theta = \frac{(p + d + d') \sin(\alpha + \gamma)}{\delta \tan \alpha} = 3^h 21^m 56''.$$

L'entrée au coucher aura lieu à

$$16^h 59^m 13'' - 3^h 21^m 56'' = 13^h 37^m 17'', \text{ temps de Greenwich.}$$

Heure de la sortie au lever.

$$\theta' = \frac{(p + d + d') \sin(\alpha - \gamma)}{\delta \tan \alpha} = 1^h 36^m 43'';$$

la sortie aura lieu à

$$16^h 59^m 13'' + 1^h 36^m 43'' = 18^h 35^m 56''.$$

La plus longue durée du passage, depuis le premier contact au coucher jusqu'au dernier contact au lever, est donc de

$$4^h 58^m 40'';$$

elle excède de $19^m 48''$ la durée pour le centre de la Terre.

Latitude du lieu qui voit l'entrée au coucher. — Nous avons (n° 11)

$$\sin \lambda = \cos D \cos(180^{\circ} - \alpha - \gamma).$$

La déclinaison du Soleil à l'entrée est

$$D = 22^{\circ} 48' 31''.$$

On trouve

$$\lambda = 35^{\circ} 12' 17''.$$

λ se nomme la *latitude corrigée*, l la *latitude effective*. Pour trouver l , voyez n° 22 :

$$l = 35^{\circ} 23' \text{ B.}$$

Longitude du lieu qui voit l'entrée au coucher. — Heure de l'entrée en temps moyen de Greenwich

$$13^{\text{h}} 37^{\text{m}} 17^{\text{s}},$$

et en temps vrai

$$13^{\text{h}} 44^{\text{m}} 55^{\text{s}}.$$

Nous avons alors pour l'angle horaire à l'entrée

$$Q = 206^{\circ} 13' 45'' \text{ et } 360^{\circ} - Q = 153^{\circ} 46' 15''.$$

L'angle P (n° 11) est donné par la formule

$$\text{tang } P = \text{tang} \frac{(180^{\circ} - \alpha - \gamma)}{\sin D},$$

$$P = 72^{\circ} 44' 23''.$$

Donc le lieu qui voit l'entrée au coucher sera à

$$153^{\circ} 46' 15'' + 72^{\circ} 44' 23'' = 226^{\circ} 30' 32'',$$

à l'Est de Greenwich, ou encore à

$$133^{\circ} 29' 28'' \text{ de longitude Ouest.}$$

Latitude du lieu qui voit la sortie au lever.

$$\sin \lambda' = \cos D \cos (\alpha - \gamma),$$

$$D = 22^{\circ} 49' 43'',$$

$$\lambda' = 58^{\circ} 44' 46'',$$

$$l' = 58^{\circ} 55' \text{ B.}$$

Longitude du lieu qui voit la sortie au lever. — Heure de la sortie.

18^h 35^m 56^s, temps moyen,

18^h 43^m 28^s, temps vrai,

$$Q' = 280^{\circ} 52', \quad 360^{\circ} - Q' = 79^{\circ} 8',$$

$$\tan P' = \frac{\tan(\alpha - \gamma)}{\sin D},$$

$$P' = 46^{\circ} 4' 47''.$$

La longitude est donnée par la formule

$$360^{\circ} - Q' - P' = 33^{\circ} 3' 13'' \text{ E.}$$

Heure de l'entrée au lever.

$$\sin \gamma_1 = \frac{(D' - D) \sin \alpha}{d + d' - p},$$

$$d + d' - p = 982'', 66,$$

$$\gamma_1 = 57^{\circ} 17' 25'',$$

$$\theta_1 = \frac{(d + d' - p) \sin(\alpha + \gamma_1)}{\delta \tan \alpha} = 3^{\text{h}} 1^{\text{m}} 40^{\text{s}}.$$

L'entrée au lever a lieu à

$$16^{\text{h}} 59^{\text{m}} 13^{\text{s}} - 3^{\text{h}} 1^{\text{m}} 40^{\text{s}} = 13^{\text{h}} 57^{\text{m}} 33^{\text{s}}.$$

Heure de la sortie au coucher.

$$\theta_1 = \frac{(d + d' - p) \sin(\alpha - \gamma_1)}{\delta \tan \alpha} = 1^{\text{h}} 16^{\text{m}} 26^{\text{s}}.$$

La sortie au coucher a lieu à

$$16^{\text{h}} 59^{\text{m}} 13^{\text{s}} + 1^{\text{h}} 16^{\text{m}} 26^{\text{s}} = 18^{\text{h}} 15^{\text{m}} 39^{\text{s}}.$$

Latitude du lieu qui voit l'entrée au lever.

$$\cos(90^{\circ} + \lambda_1) = \cos(\alpha + \gamma_1) \cos D,$$

$$D = 22^{\circ} 48' 37'';$$

$$90^{\circ} + \lambda_1 = 128^{\circ} 37' 12'',$$

$$\lambda_1 = 38^{\circ} 37' 12'',$$

$$l_1 = 38^{\circ} 48' \text{ A.}$$

Longitude du lieu qui voit l'entrée au lever.

Heure moyenne de l'entrée.... $13^h 57^m 33^s$,

Heure vraie..... $14^h 5^m 11^s$,

Angle horaire $Q_1 = 211^\circ 17' 45''$, $360^\circ - Q_1 = 148^\circ 42' 15''$,

$$\tan P_1 = \frac{\tan(\alpha_1 + \gamma_1)}{\sin D},$$

$$P_1 = 109^\circ 37' 54''.$$

Le point désigné par B dans la *fig.* 4, p. 306, est à l'Ouest du méridien de la conjonction ; on prendra dès lors pour la longitude de ce point

$$360^\circ - Q_1 - P_1 = 39^\circ 4' 21'' \text{ E.}$$

Latitude du lieu qui voit la sortie au coucher.

$$D = 22^\circ 49' 41'',$$

$$\lambda'_1 = 61^\circ 12' 30'',$$

$$l'_1 = 61^\circ 22' \text{ A.}$$

Longitude du lieu qui voit la sortie au coucher.

Heure moyenne de la sortie... $18^h 15^m 39^s$,

Heure vraie..... $18^h 23^m 12^s$,

Angle horaire $Q'_1 = 275^\circ 48'$, $360^\circ - Q'_1 = 84^\circ 12'$,

$$P'_1 = 139^\circ 59' 39''.$$

La longitude du point B' (*fig.* 4) sera

$$360^\circ - Q'_1 + P'_1 = 224^\circ 11' 39'' \text{ E,}$$

ou $135^\circ 48' 21''$ Ouest de Greenwich.

14. *Récapitulation des résultats précédents en rapportant au méridien de Paris pour le 8 décembre.*

Paris est à $2^\circ 20' 15''$ à l'Est de Greenwich.

La différence des heures est $9^m 21^s$.

Heure de l'entrée au coucher : $13^h 47^m$.

Coordonnées du point A (<i>fig. 3</i>)...	{	Latitude....	35° 23' B,
		Longitude..	135° 50' O.

Heure de la sortie au lever : $18^h 45^m$.

Coordonnées du point A' (<i>fig. 3</i>)...	{	Latitude....	58° 55' B,
		Longitude..	30° 43' E.

Heure de l'entrée au lever : $14^h 7^m$.

Coordonnées du point B (<i>fig. 4</i>)...	{	Latitude....	38° 48' A,
		Longitude..	36° 44' E.

Heure de la sortie au coucher : $18^h 25^m$.

Coordonnées du point B' (<i>fig. 4</i>)...	{	Latitude....	61° 22' A,
		Longitude..	138° 9' O.

Si l'on compare les positions géographiques des deux lieux de la Terre qui voient l'entrée au coucher et l'entrée au lever, on trouve qu'ils sont à peu près diamétralement opposés; il en est de même des deux points qui voient la sortie au lever et la sortie au coucher.

15. *Trouver le lieu d'où l'on peut apercevoir l'entrée vers le coucher du Soleil et la sortie vers le lever, le milieu du passage ayant lieu au méridien.*

Pour déterminer un pareil point approximativement, nous ferons observer que le milieu du passage doit s'y produire quand le Soleil arrive au méridien inférieur. Or, le milieu du passage pour le centre de la Terre a lieu à $16^h 15^m$, temps moyen de Paris (n° 6), et puisque, pour le point cherché, il doit être alors minuit ou 12 heures, ce point sera à $4^h 15^m$ à l'Ouest de Paris, soit 64 degrés environ de longitude Ouest.

Il est vers le pôle austral, et par conséquent au Sud par rapport au Soleil. Vénus y sera relevée par l'effet de la parallaxe. La durée du passage sera diminuée, quoique restant toujours supérieure à $4^h 18^m$ (n° 14).

Cherchons donc le point pour lequel l'arc de parallèle nocturne répond à une durée de $4^h 18^m$, et nous serons certains que l'observateur

placé sur ce parallèle verra l'entrée un peu avant le coucher du Soleil, et la sortie un peu après le lever.

Désignant par λ la latitude cherchée, par AI l'angle horaire du Soleil à l'horizon et par D la déclinaison de l'astre, nous avons la formule

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\cos(180^\circ - AI)}{\operatorname{tang} D},$$

dans laquelle

$$180^\circ - AI = \frac{4^h 18^m}{2} \cdot 15 = \frac{64^\circ 30'}{2} = 32^\circ 15',$$

$$D = 22^\circ 49'.$$

On trouve ainsi

$$\lambda = 63^\circ 31',$$

et pour la latitude vraie

$$l = 63^\circ 40'.$$

Les coordonnées géographiques que nous venons d'obtenir répondent à une île située bien au Sud du cap Horn, et désignée sous le nom d'*Ile Louis-Philippe*.

Il ne serait pas plus difficile d'assigner un lieu avancé vers le Nord et aussi éloigné que possible du précédent, d'où l'on pourra observer l'entrée au lever du Soleil et la sortie au coucher. Ce lieu est situé au cœur de la Sibérie par 116 degrés de longitude Est et 63 degrés de latitude Nord, sur la rivière *Vilyui*, affluent de gauche de la *Lena*. Il est à 20 lieues environ à l'Ouest de *Verkhnévilyuisk*.

16. Nous expliquerons bientôt comment on arrive à prédire, par le calcul, les différentes circonstances que présente le passage de Vénus pour un lieu déterminé de la Terre; mais ce que l'on doit se proposer avant tout, c'est d'assigner les lieux d'où l'on pourra faire avantageusement les observations pour arriver à la connaissance de la parallaxe du Soleil. Nous atteindrons ce but très-simplement, et d'une manière suffisamment exacte, en opérant comme il suit.

On se servira d'un globe terrestre que l'on disposera de façon que l'inclinaison de l'axe du monde sur l'horizon soit égale à la déclinaison du Soleil; elle est ici $22^\circ 49'$ A.

On amènera Paris sous le méridien fixe, en même temps que l'index du cercle des heures sur 12 heures, puis on fera tourner le globe, de

l'Ouest à l'Est, de l'angle horaire répondant à $13^h 47^m$, heure du commencement au coucher.

Dans cette première position du globe, le Soleil se couche en même temps pour tous les points de l'horizon oriental, et se lève en même temps pour tous ceux de l'horizon occidental, tandis que les lieux situés sous le méridien fixe auront midi. L'horizon fixe du globe détermine ainsi tous les lieux qui voient l'entrée de Vénus au coucher, et aussi, à peu de chose près, ceux qui voient l'entrée au lever. Les premiers sont situés sur l'horizon oriental, les seconds sur l'horizon occidental. A la vérité, tous les lieux qui sont à l'horizon oriental ne voient pas l'entrée en même temps (à $13^h 47^m$); cela n'arrive rigoureusement que pour le point situé à $135^\circ 49'$ de longitude Ouest et à $35^\circ 23'$ de latitude boréale (n° 14). Pour tous les autres, le passage commencera un peu plus tard.

Tous les lieux qui sont à l'horizon oriental verront à peine le commencement, et du reste ils ne verront rien du passage. Les lieux situés à l'horizon occidental verront l'entrée et la continuation du phénomène. Ceux qui sont dans l'hémisphère éclairé verront le phénomène totalement ou partiellement, d'autant plus ou d'autant moins qu'ils seront plus rapprochés ou plus éloignés de l'horizon occidental.

Ayant ramené Paris sous le méridien fixe, et l'index sur 12 heures, on fera de nouveau tourner le globe de l'Ouest à l'Est d'un angle répondant à $18^h 45^m$, heure de la sortie au lever. Dans cette seconde position, le globe indiquera tous les lieux de l'horizon oriental qui verront la fin au coucher, et ceux de l'horizon occidental qui verront la fin au lever.

17. Connaissant ces deux grands cercles de l'horizon, il sera facile de connaître aussi les lieux où la parallaxe modifiera de la manière la plus sensible les circonstances du passage tel qu'il serait observé du centre de la Terre. Ainsi, dans la première position, la Nouvelle-Calédonie est près du méridien fixe, et le Soleil presque au zénith : on apercevra de cette station l'entrée à peu près telle qu'on la verrait du centre de la Terre.

Dans la seconde position, la Calédonie est encore au-dessus de l'horizon oriental, mais elle en est très-rapprochée, le Soleil n'y est pas

encore couché; on y verra donc aussi la fin du passage, et par conséquent toute la durée. L'effet de la parallaxe est nul à l'entrée, mais il est considérable à la sortie, et la durée du passage sera par là même diminuée, parce que, la latitude de Vénus étant boréale, les lieux situés au sud de la droite qui passe par le Soleil supposé fixe verront Vénus relevée ou plus éloignée du centre de l'astre.

Pondichéry, Calcutta et les différentes villes situées sur le golfe du Bengale verront l'entrée au lever et la sortie vers le passage au méridien. On y apercevra donc le phénomène pendant toute la durée. Ces lieux étant d'ailleurs au nord du Soleil, Vénus y sera abaissée par la parallaxe ou rapprochée du centre de l'astre; la durée sera par là même augmentée.

Le passage de 1874 ne pourra pas être observé dans nos contrées. L'Europe orientale verra seule la fin au lever; on pourra l'observer de Naples, de Bude, de Vilna, de Moscou, de Kasan.

18. Les lieux A et B (*fig. 5*), qui voient, le premier, le commencement au coucher, le second, le commencement au lever, sont à très-peu

Fig. 5.



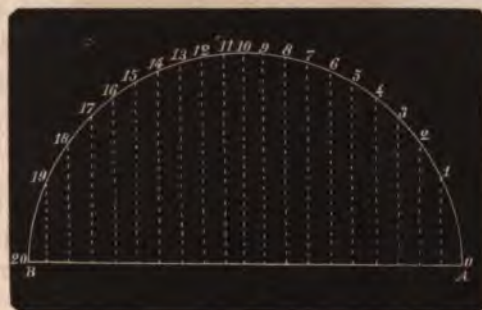
près sur un même diamètre, passant par Vénus. Soit alors t le temps écoulé depuis l'entrée au coucher jusqu'à l'entrée au lever, exprimé en minutes; ici $t = 20$ (n° 14). On partagera AB en t parties égales; puis on mènera, par les points de division x, x', \dots , des cordes perpendiculaires à AB. Les cercles perpendiculaires à cette ligne, et ayant ces

cordes pour diamètres, auront tous les points de leur circonférence sensiblement à la même distance de Vénus. D'après cela, si des points A, x, x', \dots , comme centres, avec les rayons $AV, xu, x'u', \dots$, égaux à $d + d'$, on décrit des arcs de cercle coupant l'orbite apparente en V, u, u', \dots , il arrivera qu'au point A , on verra l'entrée au coucher quand le centre de la planète est en V . Sur le parallèle passant par x , on verra l'entrée quand le centre de la planète est en u . Sur le parallèle passant par x' , on verra l'entrée quand la planète est en u' , et ainsi de suite (*).

Le point A , qui le premier voit l'entrée au lever, et le point B , qui le premier voit l'entrée au coucher, sont sensiblement les pôles des cercles passant par les points x, x', \dots . Il y aura également un autre système de cercles ayant pour pôles le point A' , qui le dernier voit la sortie au lever, et le point B' , qui le premier voit la sortie au coucher. Si ces points A et B, A' et B' ont été marqués sur un globe terrestre, ce qui est facile, puisqu'on en a déterminé (n° 13) les coordonnées géographiques, on pourra trouver immédiatement, pour un lieu donné du globe, l'heure de l'entrée et celle de la sortie.

19. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de faire cette détermination pour Calcutta. On tracera sur une feuille de papier (*fig. 6*) un

Fig. 6.



cercle ayant même rayon que le globe, et l'on en divisera le diamètre en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans t (ici $t = 20$). Par les points de division on mènera des perpendiculaires à ce diamètre

(*) La dénomination de *parallèles* se rapporte ici aux cercles perpendiculaires à la droite AB .

jusqu'à leur rencontre avec la circonférence, ce qui donnera les divisions

$$0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20,$$

0 et 20 étant aux deux extrémités du diamètre.

Cela posé, ayant marqué sur le globe le point A dont nous avons déterminé les coordonnées géographiques, on y placera l'une des pointes d'un compas sphérique, l'autre étant arrêtée sur Calcutta. On reviendra ensuite au cercle, et l'une des pointes du compas étant au 0, on verra à quelle division s'arrête l'autre : on trouvera que c'est à la treizième : le retard de l'entrée à Calcutta sur l'entrée au point A est donc 13 minutes. Le phénomène commencera pour Calcutta à

$$13^h 46^m 38^s + 13^m = 13^h 59^m 38^s. \text{ (Voyez n° 14.)}$$

La différence des méridiens de Calcutta et de Paris est $5^h 44^m$. Le passage commencera donc à

$$13^h 59^m 38^s + 5^h 44^m = 19^h 43^m 38^s.$$

Nous verrons un peu plus loin que ce résultat présente l'approximation désirable.

On trouvera de la même manière l'heure de la sortie.

20. La différence entre l'heure du dernier contact au lever et celle du dernier contact au coucher étant de 20 minutes, comme plus haut (n° 14), on pourra se servir du même cercle qu'au numéro précédent. Ayant donc marqué sur le globe le point A' qui voit le dernier contact au lever, on placera l'une des pointes du compas en A', l'autre étant arrêtée sur Calcutta; revenant ensuite au cercle, et plaçant une des pointes sur le 0, l'autre s'arrêtera à la division 4, ce qui veut dire que le passage finit à Calcutta 4 minutes plus tôt que pour le point A. On aura donc pour l'heure de la fin

$$18^h 45^m 17^s - 4^m = 18^h 41^m 17^s, \text{ temps de Paris,}$$

ou

$$18^h 41^m 17^s + 5^h 44^m = 24^h 25^m 17^s, \text{ temps de Calcutta.}$$

Le passage commence en cette ville le 9 décembre à $7^h 44^m$ et finit à midi 25 minutes.

21. Ce procédé nous fournit, comme nous l'avons dit plus haut, un moyen fort simple de déterminer différents points habitables du globe d'où l'on pourra observer commodément et avec un effet de parallaxe sensible le premier contact extérieur et intérieur, ou bien encore le dernier contact intérieur et extérieur. Nous avons dressé de ces lieux le tableau suivant, auquel il serait aisé de donner plus d'étendue :

Premier contact extérieur.

Localités.	Heure de Paris.	Heure pour le centre de la Terre.	Différence.
Iles Sandwich.....	13 ^h 48 ^m	»	+ 8 ^m
Iles Marquises.....	13 ^h 50 ^m	13 ^h 56 ^m	+ 6 ^m
Réunion.....	14 ^h 6 ^m	»	- 10 ^m

Dernier contact extérieur.

Calcutta.	18 ^h 41 ^m	»	- 6 ^m
Sidney.....	18 ^h 29 ^m	18 ^h 35 ^m	+ 6 ^m
Moscou.	18 ^h 45 ^m	»	- 10 ^m

Les lieux qui, dans le tableau précédent, sont sous le titre : *Premier contact extérieur*, auront un effet de parallaxe sensible à l'entrée. Les îles Sandwich et les îles Marquises ne verront pas la sortie; à la Réunion, l'effet de la parallaxe sera presque nul à la sortie. Les lieux désignés sous le titre : *Dernier contact extérieur*, auront, au contraire, un effet de parallaxe sensible à la sortie. Pour Calcutta et Sidney, il ne sera que de 3 minutes à l'entrée; Moscou ne verra pas le commencement du phénomène.

Il est des lieux d'où l'on peut observer l'entrée au coucher et la sortie au lever, ou bien l'entrée au lever et la sortie au coucher, ce qui permettra d'y faire, d'une manière avantageuse, l'observation complète du passage.

Ainsi, à l'île Louis-Philippe, l'entrée aura lieu à 14^h 2^m, et la sortie à 18^h 26^m, tandis que, pour le centre de la Terre, l'entrée est à 13^h 56^m, et la sortie à 18^h 35^m; la durée du passage est inférieure de 15 minutes à celle qui est relative au centre de la Terre.

Pour le point de la Russie asiatique, l'entrée a lieu à $13^h 54^m$, et la sortie à $18^h 44^m$; la durée du passage excède de 11 minutes celle qui est relative au centre de la Terre.

Passage pour un lieu déterminé de la Terre.

22. Avant d'aborder cette question, nous allons traiter quelques problèmes dont la solution est indispensable à connaître.

Connaissant la latitude d'un lieu ou la hauteur du pôle en ce lieu, trouver la latitude corrigée.

La Terre étant un ellipsoïde aplati aux pôles et renflé à l'équateur, les normales aux différents points ne passent pas par le centre. On nomme *latitude corrigée* l'angle que fait avec l'équateur le rayon terrestre mené par le lieu que l'on considère; ainsi, dans la *fig. 7*,

Fig. 7.



$MAE = l$ est la latitude, $MOE = \lambda$ est la latitude corrigée. Prenant pour unité le demi-diamètre équatorial de l'ellipse méridienne, désignant par e l'excentricité, par x et y les coordonnées d'un point de cette ellipse, nous aurons

$$\text{tang } \lambda = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \text{tang } l = \frac{y}{x} \frac{1}{1 - e^2},$$

d'où

$$\text{tang } \lambda = (1 - e^2) \text{ tang } l.$$

On introduit d'ordinaire dans cette formule l'aplatissement.

Désignons-le par a , il viendra

$$a = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad \text{ou} \quad e^2 = 2a - a^2,$$

et, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$e^2 = 2a.$$

Prenant pour l'aplatissement $\frac{1}{300}$, on aura

$$\tan \lambda = 0,99333 \tan l.$$

Pour Paris,

$$l = 48^\circ 50' 13'', \quad \lambda = 48^\circ 38' 40''.$$

Pour Calcutta,

$$l = 23^\circ 33' 11'', \quad \lambda = 23^\circ 24' 45''.$$

On passera de la longitude corrigée à la longitude vraie par la formule

$$\tan l = \frac{\tan \lambda}{0,99333} = 1,00670 \tan \lambda.$$

Connaissant la parallaxe horizontale équatoriale d'un astre, en trouver la parallaxe horizontale pour une latitude donnée.

La parallaxe équatoriale d'un astre est l'angle sous lequel on voit de cet astre, supposé à l'horizon, le demi-diamètre de l'équateur. Désignant par π cette parallaxe, par 1 le demi-diamètre équatorial et par R la distance de l'astre à la Terre, on a

$$\sin \pi = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{1}{R \sin 1''}.$$

La *parallaxe*, pour un point donné de la Terre, est l'angle sous lequel on voit, de l'astre supposé à l'horizon du point, le rayon terrestre passant par ce dernier. Or on peut, sans erreur appréciable, regarder ce rayon comme perpendiculaire au plan tangent. En désignant alors par p la parallaxe horizontale pour le lieu dont la latitude corrigée est λ , et par r le rayon, il vient

$$\sin p = \frac{r}{R} \quad \text{ou} \quad p = r\pi.$$

Il reste à trouver r . Or les coordonnées du point sont

$$r \cos \lambda \quad \text{et} \quad r \sin \lambda.$$

Il vient donc

$$r^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \lambda} = \frac{1 - 2a}{1 - 2a \cos^2 \lambda},$$

et, en négligeant le carré de l'aplatissement,

$$r = 1 - a \sin^2 \lambda;$$

d'où

$$p = \pi(1 - a \sin^2 \lambda).$$

EXEMPLE. — *Sachant que la parallaxe horizontale équatoriale de Vénus est 32",44, trouver la parallaxe horizontale pour Calcutta.*

Nous avons trouvé plus haut

$$\lambda = 23^\circ 24' 45'';$$

on trouvera

$$1 - a \sin^2 \lambda = 0,99947,$$

d'où

$$p = 32",44 \times 0,99947 = 32",42.$$

Étant donnée l'heure moyenne d'un lieu, trouver l'heure vraie et l'angle horaire.

Proposons-nous de calculer, pour le 9 décembre 1874, l'heure vraie de Calcutta quand il est dans cette ville 7^h 43^m du matin, temps moyen.

Si l'on compte 9 décembre 7^h 43^m, temps civil, les Astronomes comptent 8 décembre 19^h 43^m, et, puisque la différence des méridiens de Paris et de Calcutta est de 5^h 44^m, il est à l'instant considéré 13^h 59^m à Paris. L'équation du temps le 8 décembre 1874 à midi, temps moyen de Paris, est 7^m 50^s,85; elle diminue en 24 heures de 26^s,69 et en 13^h 59^m, soit 13^s,98, de

$$26^s,69 \times \frac{13,98}{24} = 15^s,13.$$

L'heure vraie de Paris sera par conséquent

$$13^h 59^m + 7^m 50^s,85 - 15^s,13 = 14^h 6^m 35^s,72;$$

celle de Calcutta sera

$$19^h 50^m 35^s,72,$$

et l'angle horaire

$$H = 297^\circ 38' 56''.$$

Trouver à un instant donné la déclinaison du Soleil.

Le tableau de M. Airy nous apprend qu'à la conjonction, soit à

$17^h 8^m 34^s, 2$, temps moyen de Paris, la déclinaison du Soleil est

$$22^{\circ} 49' 22'', 4 \text{ A.}$$

Cherchons quelle sera la déclinaison de l'astre quand il est $19^h 43^m$ à Calcutta; ou $13^h 59^m$ à Paris. De $13^h 59^m$ à $17^h 8^m 34^s$, il s'est écoulé $3^h 9^m 34^s, 2$, ou $3^h, 159^s$, et, puisqu'à l'époque considérée la déclinaison diminue de 11 secondes par heure, cette diminution sera

$$11'' \times 3,1595 = 34'', 75.$$

La déclinaison du Soleil à l'instant considéré est donc

$$22^{\circ} 49' 22'', 4 - 34'', 75 = 22^{\circ} 48' 47'', 65.$$

23. Calculer pour un instant donné les coordonnées du centre de la planète.

Les Tables de la planète donnent le mouvement de l'astre en ascension droite et en déclinaison, et les mouvements relatifs peuvent être réduits à la forme

$$\text{Mouvement en } R = A = ht + \eta t^2 O,$$

$$\text{Mouvement en } D^{\alpha} = \Delta = \delta t + \gamma t^2 B,$$

t désignant le temps écoulé à partir de la conjonction.

Considérons le triangle sphérique dont les côtés sont $90 + D'$ et $90 + D' - \Delta$; ils comprennent entre eux l'angle A , et le troisième côté de ce triangle sera l'arc parcouru par la planète sur son orbite relative pendant le temps t ; en le désignant par a , on aura

$$\cos a = \sin D' \sin(D' - \Delta) + \cos D' \cos(D' - \Delta) \cos A,$$

ou bien, en remarquant que a , A et Δ sont très-petits,

$$1 - \frac{a^2}{2} = \cos \Delta - \cos D' \cos(D' - \Delta) \frac{A^2}{2};$$

mais

$$\cos D' \cos(D' - \Delta) = \frac{1}{2} \cos(2D' - \Delta) + \cos \Delta.$$

Remplaçant $\cos \Delta$ par $1 - \frac{\Delta^2}{2}$, et négligeant les termes d'un ordre su-

périeur au second, on arrive, après une réduction facile, à

$$a^2 = \Delta^2 + A^2 \cos^2 \left(D - \frac{\Delta}{2} \right).$$

a est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont

$$\Delta \quad \text{et} \quad A \cos \left(D' - \frac{\Delta}{2} \right).$$

Prenant alors pour axe des x la trace du méridien de la conjonction (*fig. 8*), et pour axe des y la perpendiculaire à cette ligne menée par

Fig. 8.



le centre de la planète à la conjonction, nous aurons pour les coordonnées de l'astre

$$OQ = x = D' - D + \Delta,$$

$$PQ = y = A \cos \left(D' - \frac{\Delta}{2} \right).$$

On trouve immédiatement

$$x = D' - D + \delta t + \gamma t^2.$$

Quant à la valeur de y , on a

$$y = A \cos D' + A \sin D' \frac{\Delta}{2}.$$

Remplaçant A et Δ par leurs valeurs et supprimant les puissances de t supérieures à la seconde, il vient finalement

$$y = \cos D' \left[ht + t \left(\eta + \frac{\delta}{2} \sin h \operatorname{tang} D' \right) \right],$$

valeur que, dans un grand nombre de cas, on peut réduire à $ht \cos D'$.

Dans ces formules, t est négatif avant la conjonction, positif après la conjonction; la partie positive de l'axe des x est dirigée vers le Nord, la partie positive de l'axe des y vers l'Ouest, et enfin on considère les positions de la planète telles qu'elles se présentent dans le passage de 1874.

24. Trouver, pour un instant donné, la projection d'un point de la Terre dont on connaît la longitude et la latitude.

Soient H l'angle horaire du Soleil pour ce point et pour cet instant, l la latitude et π la parallaxe horizontale équatoriale de la planète; on calculera la latitude corrigée λ , et ensuite la parallaxe horizontale p relative à cette latitude.

Fig. 9.



Cela posé, décrivons du centre O (*fig. 9*) un cercle avec le rayon p .

D étant la déclinaison du Soleil; la ligne des pôles PP' fera avec la trace du méridien de la conjonction ou avec la ligne de terre l'angle D . Soit m' la projection verticale du point M dont on connaît les coordonnées géographiques; soit aussi $G'G''$ la projection verticale du parallèle de ce point: le point M sera rabattu en M_1 . Prenons $\mu m = m' M_1$, le point m sera la projection horizontale de M , et, en désignant par x_1, y_1 les coordonnées de ce point m , nous aurons

$$x_1 = O\mu = Oi + IK = p \sin \lambda \cos D + p \cos \lambda \sin D \cos H,$$

$$y_1 = m\mu = m' M_1 = -p \cos \lambda \sin H.$$

Ces coordonnées x_1, y_1 feront connaître la projection du point M , projection qui sera aussi celle du point où l'observateur placé en M reporterait le centre du Soleil si l'astre était situé à l'infini.

Le Soleil ayant une parallaxe de 9 minutes environ, il faudra, si l'on veut en tenir compte, faire une correction. Soient M (*fig. 10*) la position de l'observateur, XX le plan contenant la ligne qui représente l'orbite relative, et S la position du Soleil.

Fig. 10.



L'observateur qui reporte la position du Soleil en M' quand l'astre est supposé à l'infini, la reporte actuellement en N , intersection de MS avec le plan XX . Ce point N est projeté en n , et lorsqu'on aura à considérer la distance des centres de la planète et du Soleil, ce n'est pas en m qu'on devra placer le centre du Soleil, mais en n . Rien de plus facile d'ailleurs que de passer des premières coordonnées aux secondes.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point m ; x', y' celles du point n ; nous aurons

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{SK}{SG} = \frac{R - \rho}{R - z} = \frac{1 - \frac{\rho}{R}}{1 - \frac{z}{R}},$$

en désignant par R la distance du Soleil à la Terre, par ρ la distance de la planète et par z la hauteur du point M au-dessus du plan de projection. Si l'on désigne par p' la parallaxe du Soleil, et si l'on néglige $\frac{z}{R}$ qui est inférieur à $\frac{1}{24000}$, nous pourrions écrire

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = 1 - \frac{p'}{p} = \frac{p - p'}{p}.$$

Donc les valeurs de x' et de y' sont les mêmes que celles de x_1 et de y_1 , à la condition de désigner par p , non plus la parallaxe de la planète, mais bien la différence des parallaxes de la planète et du Soleil.

25. *Trouver à un instant donné, et pour un lieu donné, la distance angulaire des centres de la planète et du Soleil.*

La distance S des centres est donnée par la formule

$$S^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Cette valeur de S exprimée en secondes fait connaître l'angle sous lequel on verra les centres des deux astres du point m projection de M . Mais, puisque la distance Mm est négligeable devant celle de la planète à la Terre, la formule précédente donnera avec une exactitude suffisante l'angle cherché. Il serait du reste facile de faire la correction relative à ce changement de distances.

Application des formules précédentes au calcul du passage pour Calcutta.

26. Nous allons montrer, sur un exemple, comment on peut calculer les différentes circonstances du passage en un lieu donné. Nous ne choisirons ni Paris, ni aucun lieu du voisinage, car le passage de 1874

sera invisible dans nos contrées. Prenons donc un lieu de la Terre facilement accessible, d'où l'on pourra observer l'entrée et la sortie. Nous avons choisi Calcutta, qui remplit toutes les conditions désirables (n^{os} 19 et 20).

Nous avons trouvé (mêmes numéros) des valeurs approchées pour l'heure de l'entrée et celle de la sortie; nous considérerons ces valeurs comme fournissant une première approximation, et nous nous en servirons pour continuer le calcul.

L'entrée a lieu vers 19^h 43^m, temps de Calcutta. Cherchons, pour ce temps, les coordonnées de la planète et du Soleil, ainsi que la distance angulaire des deux astres.

La conjonction ayant lieu à 22^h 52^m 34^s, 2, heure de Calcutta, si t désigne le temps compté à partir de la conjonction,

$$t = -3^h 9^m 34^s, 2 = -3^h 15^m 55^s,$$

et les formules du n^o 23 donnent

$$x = 657'', 14,$$

$$y = 754'', 58.$$

Pour trouver x' et y' , on prendra (n^o 22)

$$D = 22^\circ 48' 47'', 65,$$

$$H = 297^\circ 38' 56''.$$

On prendra d'ailleurs

$$p = 32'', 42 - 8'', 71 = 23'', 71$$

avec

$$\lambda = 23^\circ 24' 45''.$$

On arrivera, avec ces données et par les formules du n^o 24, à

$$x' = 12'', 60,$$

$$y' = 19'', 27.$$

La distance des centres est donnée par la formule

$$S = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \frac{x - x'}{\cos \psi},$$

en posant

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \tan \psi.$$

Les valeurs de $x - x'$ et de $y - y'$ sont

$$x - x' = 644'',54, \quad y - y' = -773'',85.$$

On en déduit

$$180 - \psi = 50^{\circ} 12' 32'',$$

$$S = 1007'',45;$$

mais

$$\vartheta + \vartheta' = 1006'',39.$$

Cette dernière valeur, comparée à celle de S , montre que le passage n'est pas encore commencé. La différence des valeurs de S et de $\vartheta + \vartheta'$ est $1'',04$.

Cherchons actuellement x, y, x', y' pour $19^h 44^m$. En désignant les corrections à faire sur x et y par dx et par dy , nous aurons

$$dx = \vartheta dt,$$

$$dy = h \cos D' dt,$$

$$dt = \frac{1}{60},$$

et, par suite,

$$dx = 1'',04, \quad dy = 3'',98.$$

Les nouvelles coordonnées de la planète seront donc

$$x = 658'',18, \quad y = -750'',60.$$

Les nouvelles valeurs de x' et de y' se calculeront à l'aide des formules différentielles

$$dx' = -p \frac{\pi}{12} \sin H \cos \lambda \sin D dt = 0'',04,$$

$$dy' = p \frac{\pi}{12} \cos H \cos \lambda dt = -0'',05;$$

et dès lors

$$x' = 12'',64, \quad y' = 19'',22.$$

Formons

$$x - x' = 645'',64, \quad y - y' = -769'',82,$$

et

$$180^\circ - \psi = 50''1'.$$

Calculant S avec ces nouveaux éléments, nous trouvons

$$S = 1004'',63.$$

Cette valeur, rapprochée de $1006'',39$, donne pour différence $1'',76$. On voit d'ailleurs qu'à $19^h 44^m$ le passage est déjà commencé.

27. Rien de plus facile actuellement que de calculer, à une seconde près, l'heure du commencement. Formons à cet effet la différence des valeurs de S : elle est $2'',82$. C'est la quantité dont varie la distance des centres en une minute. Mais à $19^h 43^m$, la distance des centres est $1007'',45$; elle doit donc diminuer encore de $1'',04$ pour que le premier contact extérieur commence, et, divisant $1,04$ par $2,82$, nous aurons la fraction de minute à ajouter à $19^h 43^m$. Faisant la division et convertissant en secondes, nous trouvons 23 secondes.

Ainsi le passage commence à Calcutta, le 8 décembre, à

$$19^h 43^m 23'',$$

ou en temps civil, le 9 décembre, à

$$7^h 43^m 23'' \text{ matin.}$$

28. On déterminera le point du disque solaire le premier impressionné par la planète en donnant la distance angulaire de ce point à l'extrémité supérieure du diamètre vertical; cet angle est celui que fait la droite menée par les centres du Soleil et de la planète (en projection) avec la projection de la verticale qui passe par le lieu considéré. L'entrée ayant lieu le matin, le point *m* (*fig. 11*), projection du lieu, est à l'Ouest du méridien de la conjonction, et les choses sont disposées comme dans ladite figure.

En désignant l'angle ZMP, qui est l'angle cherché, par V, on aura

$$V = 180 - \psi + \varphi.$$

L'angle $\psi = m\text{LX}$; il est donné par la formule

$$\text{tang } \psi = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

L'angle $\varphi = m\text{OX}$; il est donné par

$$\text{tang } \varphi = \frac{y'}{x'}.$$

Les valeurs de x, y, x', y' sont, bien entendu, relatives à l'entrée. On trouvera dès lors

$$180 - \varphi = 50^{\circ} 8',$$

$$\varphi = 56^{\circ} 45',$$

d'où

$$V = 106^{\circ} 53'.$$

Ainsi la *première impression du disque* a lieu à $106^{\circ} 53'$ à l'Orient de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du disque solaire. L'an-

Fig. 11.



gle ZmP se nomme l'*angle au zénith*; on appelle *angle au pôle* l'angle que fait mP avec la ligne de terre, projection du méridien de la conjonction, c'est l'angle φ ; l'angle au pôle est donc $56^{\circ} 45'$.

29. L'heure de la sortie estimée en temps de Calcutta a été trouvée (n° 20) de $0^h 25^m$. Calculons donc, pour le 9 décembre à $0^h 25^m$, les coordonnées du Soleil et de la planète, ainsi que la distance des centres. La conjonction a lieu à

$$22^h 52^m 34^s, 2,$$

et par conséquent

$$t = 24^h 25^m - 22^h 52^m 34^s, 2 = 1^h, 54^m 05^s,$$

et l'on trouve

$$x = 951'', 03, \quad y = 367'', 92.$$

On a aussi

$$\text{Heure vraie} = 0^h 32^m 23^s, 3,$$

$$H = 8^h 5' 49'',$$

$$D = 22^h 49' 39'',$$

et, avec ces données,

$$x' = 17'', 04, \quad y' = -3'', 06,$$

d'où

$$x - x' = 933'', 99, \quad y - y' = 370'', 98,$$

$$\psi = 21^{\circ} 39' 40'',$$

$$S = 1004'', 96.$$

Cette valeur de S, comparée avec 1006,96, montre que le passage n'est pas encore terminé; la différence est 1'',43.

Les résultats pour 0^h, 26^m sont

$$x = 952'', 07, \quad y = 371'', 88,$$

$$x' = 17'', 03, \quad y' = -3'', 17,$$

$$x - x' = 935'', 04, \quad y - y' = 375'', 05,$$

$$\psi = 21^{\circ} 51' 20'',$$

$$S = 107'', 45.$$

La différence des deux valeurs de S est 2'',49, et, en divisant,

$$1006,39 - 1004,96 = 1,43.$$

Par cette différence, on trouve, en convertissant en secondes, 35 secondes. Ainsi le passage finit pour Calcutta, le 9 décembre, à

$$\text{midi } 25^m 35^s.$$

On trouvera, en opérant comme plus haut, que la dernière impression a lieu à 32° 25' à l'Occident de l'extrémité supérieure du diamètre du disque solaire, et la *durée totale du passage* pour Calcutta est

$$4^h 42^m 12^s.$$

Les résultats obtenus (nos 27 et 29) pour l'heure de l'entrée et celle de la sortie fournissent un contrôle de l'exactitude de la méthode indiquée aux nos 19 et 20.

Il est très-important aussi, comme nous le verrons dans un instant, de considérer les contacts intérieurs; néanmoins nous ne rapporterons pas ici les calculs à exécuter, on les conduirait absolument de la même façon que ceux qui ont été exposés plus haut; contentons-nous de dire qu'il faudra changer $\delta + \delta'$ en $\delta - \delta'$.

On trouve *pour Calcutta* :

Heure du premier contact intérieur... 20^h 10^m 50^s,

Heure du dernier contact intérieur... 23^h 58^m 27^s.

30. Les quantités $\delta + \delta'$ et $\delta - \delta'$, qui expriment la somme ou la différence des diamètres apparents, sont relatives au centre de la Terre; mais, à cause de la grande distance de Vénus à la Terre, qui, dans les conjonctions inférieures, vaut environ 7000 rayons terrestres, la position de l'observateur à la surface de notre globe ne saurait avoir une influence appréciable sur ces quantités.

Il n'y a donc pas, comme dans les éclipses de Soleil, à faire de correction à cet égard; il n'y aura pas non plus à tenir compte ici de la variation de la parallaxe pendant la durée du phénomène.

Détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation du passage de Vénus.

31. Nous allons montrer l'usage que l'on peut faire des formules fournies par la méthode des projections pour la détermination de la parallaxe du Soleil, et discuter l'approximation sur laquelle on peut compter dans les calculs.

La méthode que nous proposons repose sur l'observation complète d'un passage, c'est-à-dire l'observation des quatre contacts; et, pour bien mettre en évidence toutes les conséquences que nous voulons en tirer, nous avons choisi pour l'appliquer trois stations, savoir : Irkutsk (Sibérie), Hobart-Town (île de Van-Diemen) et Saïgon (Cochinchine). On comprendra plus tard la raison qui a dicté le choix de ces stations.

32.

*Irkutsk.*Longitude $6^h 47^m 44^s$ E,Latitude corrigée . . . $52^{\circ} 6' 18''$ B.

Pour cette latitude, $p = 23'',66$, en admettant les nombres donnés par les Éphémérides.

Premier contact extérieur. — Partant des données ci-dessus et des formules citées plus haut, nous avons trouvé, pour l'heure du premier contact extérieur calculé à *un dixième de seconde*,

$$20^h 42^m 5^s,4 \text{ (heure d'Irkutsk).}$$

Imaginons actuellement que cette heure ait été directement observée au lieu d'avoir été calculée, et désignons par $24 - v$ l'heure de la conjonction à Irkutsk, *laquelle nous est imparfaitement connue*, si la longitude de la station n'est pas exactement déterminée et si les Tables de Vénus comportent une petite erreur sur l'heure de la conjonction en ascension droite. Supposons aussi que l'horloge d'Irkutsk ne donne pas l'heure absolue; soit ε l'erreur constante affectant l'horloge, l'heure du contact sera

$$20^h 42^m 5^s,4 + \varepsilon,$$

et nous aurons, d'après cela, pour le temps écoulé à partir de la conjonction,

$$t = 20^h 42^m 5^s,4 + \varepsilon - 24 + v = - 3^h 29^m 85^s + u,$$

en représentant $\varepsilon + v$ par une seule constante u , ce que nous ferons, du reste, dans la suite de nos calculs, sans nouvelles explications.

Il vient, en réduisant en nombres les formules du n° 23 et en ne tenant compte que des termes du premier degré par rapport à t ,

$$x = 648,445 + 62,530 u,$$

$$y = - 787,758 + 238,823 u.$$

Nous corrigeons la déclinaison du Soleil et l'équation du temps d'après la longitude d'Irkutsk donnée par la *Connaissance des Temps*, ce qui fournit une approximation plus que suffisante si l'erreur de

l'horloge n'est pas considérable, et nous trouvons ainsi, à l'instant du premier contact,

$$D^m \odot = 22^\circ 48' 50'', 4,$$

$$H = 312^\circ 25' 12''.$$

Ces quantités que nous avons ici déterminées par le calcul, en supposant exactement connus les éléments de la question, seront, dans la pratique, obtenus comme il suit. La latitude d'Irkutsk étant exactement connue, si l'on observe la hauteur du Soleil, à midi, on trouvera sans peine la déclinaison correspondante, et l'on pourra, connaissant le temps écoulé depuis le passage du Soleil au méridien jusqu'au premier contact, faire la correction de la déclinaison et connaître cette déclinaison à l'instant du contact; si d'ailleurs on observe au même instant la hauteur du Soleil, on aura, pour trouver l'angle horaire, à calculer un angle d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés.

Il est entendu que l'on corrigera les hauteurs observées de la réfraction et de la parallaxe, laquelle est connue d'une manière suffisante pour que l'on puisse effectuer la correction.

De la déclinaison du Soleil, de l'angle horaire et de la latitude, on déduira x' et y' , qui, en admettant les valeurs données plus haut, seront

$$x' = 0,888081 p,$$

$$y' = 0,453427 p,$$

formules dans lesquelles p représente la différence des parallaxes de Vénus et du Soleil pour la latitude d'Irkutsk.

Égalant maintenant la distance des centres du Soleil et de la planète à la somme des diamètres apparents, nous arrivons à l'équation

$$\begin{aligned} 1041043,6 + 60946,4 u^2 + 0,994284 p^2 - 295157,0 u \\ - 437,360 p - 327,641 pu = (\vartheta + \vartheta')^2. \end{aligned}$$

Dernier contact extérieur. — Heure calculée :

$$25^h 30^m 51^s, 2.$$

Admettant ce nombre comme résultat d'observation, nous formerons,

comme il a été dit plus haut,

$$\begin{aligned} t &= 1,514\,22 + u, \\ x &= 949,384 + 62,530\,u, \\ y &= 361,631 + 238,823\,u, \\ D^{\text{m}} \odot &= 22^{\circ} 49' 46'', \\ H &= 24^{\circ} 35' 18'', \\ x' &= 0,943\,635\,p, \\ y' &= -0,255\,579\,p; \end{aligned}$$

d'où résulte l'équation

$$\begin{aligned} 1\,032\,107,0 + 60\,946,4\,u^2 + 0,955\,768\,p^2 \\ + 291\,461,6\,u - 1606,89\,p + 4,065\,00\,pu = (\lambda + \lambda')^2. \end{aligned}$$

Les valeurs de p , λ et λ' ne varient pas d'une manière appréciable pendant la durée du passage, et l'on pourra, par la combinaison des équations précédemment obtenues, éliminer les diamètres apparents, ce qui conduit à l'équation

$$(1) \quad 8936,60 + 0,038\,516\,p^2 - 586636,6\,u + 1169,54\,p - 331,706\,pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Le calcul a donné

$$21^{\text{h}} 9^{\text{m}} 0^{\text{s}}.$$

Admettant ce nombre, on a

$$\begin{aligned} t &= -2,85 + u, \\ x &= 676,849 + 62,530\,u, \\ y &= -680,646 + 238,823\,u, \\ D^{\text{m}} \odot &= 22^{\circ} 48' 51'', \\ H &= 319^{\circ} 9' 43'', \\ x' &= 0,907\,536\,p, \\ y' &= 0,401\,784\,p, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 920\,916,35 + 60\,946,4\,u^2 + 0,984\,725\,p^2 - 240\,476,6\,u \\ - 680,930\,p - 305,406\,pu = (\lambda - \lambda')^2. \end{aligned}$$

Dernier contact intérieur. — Le calcul a donné

$$25^h 4^m 6^s,8.$$

Admettant ce nombre, on a

$$\begin{aligned} l &= 1,06856 + u, \\ x &= 921,517 + 62,530 u, \\ y &= 255,196 + 238,823 u, \\ D^{\text{sa}} \odot &= 22^{\circ} 49' 34'', \\ H &= 17^{\circ} 52' 39'', \\ x' &= 0,954057 p, \\ y' &= -0,188842 p; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 914318,58 + 60946,4 u^2 + 0,945886 p^2 + 237138,3 u \\ - 1661,97 p - 29,1148 pu = (\delta - \delta')^2. \end{aligned}$$

L'élimination de $\delta - \delta'$ conduit à l'équation

$$(2) \quad 6597,97 + 0,038839 p^2 - 477614,9 u - 981,042 p - 276,291 pu = 0.$$

Enfin l'élimination de u entre les équations (1) et (2) conduit à la suivante :

$$(3) \quad 397640,9 - 16645,2 p - 6,67272 p^2 - 0,0022411 p^3 = 0.$$

Cette équation admet une seule racine positive; elle est comprise entre 23,65 et 23,66.

Or $p = 23,66$ est la valeur qui nous a servi de point de départ pour calculer à 0^s,1 les instants des quatre contacts; l'équation que l'on formera, en considérant ces instants calculés comme fournis par l'observation, donnera donc, à *un centième de seconde près*, la valeur de p , ou la différence des parallaxes pour la station d'Irkutsk.

33.

Hobart-Town (Ile de Van-Diemen).

Longitude $9^h 40^m 1^s$ E,
Latitude corrigée . . . $42^{\circ} 46' 44''$ A.

Pour cette latitude, $p = 23,68$.

Premier contact extérieur. — Heure calculée :

$$23^{\text{h}} 39^{\text{m}} 8^{\text{s}}, 7 \text{ (heure de Hobart-Town).}$$

Nous admettons ce nombre comme résultat d'observation, et, puisque la conjonction a lieu à Hobart-Town après le commencement du 9 décembre, désignons par $24 + u$ ce qui avait été désigné, dans la station précédente, par $24 - u$, et nous aurons

$$\begin{aligned} t &= -0,347\,583 - u, \\ x &= 832,966 - 62,530\,u, \\ y &= -83,011 - 238,823\,u. \end{aligned}$$

On calculera, comme plus haut, la déclinaison du Soleil et l'équation du temps, ou mieux on fera dans la pratique l'opération expliquée au paragraphe 32, et l'on trouvera

$$\begin{aligned} D^{\text{m}} \odot &= 22^{\circ} 48' 47'', \\ H &= 3^{\circ} 19' 1'', 5; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x' &= -0,341\,938\,p, \\ y' &= 0,042\,466\,p, \end{aligned}$$

p désignant la différence des parallaxes pour la latitude de Hobart-Town, et l'on arrive à l'équation

$$\begin{aligned} 700\,723,2 + 60\,946,4\,u^2 + 0,118\,725\,p^2 - 64\,520,95\,u \\ + 576,698\,p - 22,4793\,pu = (2 + p')^2. \end{aligned}$$

Dernier contact extérieur. — Heure du contact :

$$\begin{aligned} 28^{\text{h}} 8^{\text{m}} 48^{\text{s}}, 4, \\ t &= 4,146\,78 - u, \\ x &= 1113,998 - 62,530\,u, \\ y &= 990,346 - 238,823\,u; \\ D^{\text{m}} \odot &= 22^{\circ} 49' 37'', \\ H &= 64^{\circ} 4' 42'', \\ x' &= -0,452\,542\,p, \\ y' &= -0,660\,131\,p; \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$222\,1776,7 + 60\,946,4 u^2 + 0,640\,567 p^2 - 61\,235,14 u \\ + 2315,78 p - 371,904 pu = (\lambda + \lambda')^2.$$

L'élimination de $\lambda + \lambda'$ conduit à l'équation

$$(1) \quad 1\,521\,053,6 + 0,521\,842 p^2 - 547\,830,4 u + 1739,08 p - 349,425 pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Heure du contact :

$$24^h 8^m 30^s,3, \\ t = 0,141\,75 - u, \\ x = 863,564 - 62,530 u, \\ y = 33,853 - 238,823 u, \\ D^{\text{on}} \odot = 22^\circ 48' 53'', \\ H = 4^\circ 1' 18'', \\ x' = -0,293\,174 p, \\ y' = 0,051\,465 p;$$

d'où

$$746\,888,8 + 60\,946,4 u^2 + 0,088\,5996 p^2 - 124\,167,2 u \\ + 502,865 p - 12,0823 pu = (\lambda - \lambda')^2.$$

Dernier contact intérieur. — Heure du contact :

$$27^h 39^m 45^s,0, \\ t = 3,6625 - u, \\ x = 1083,716 - 62,530 u, \\ y = 874,689 - 238,823 u, \\ D^{\text{on}} \odot = 22^\circ 49' 32'', \\ H = 56^\circ 49' 0'', \\ x' = -0,112\,118 p, \\ y' = -0,614\,286 p;$$

d'où l'équation

$$1939521,2 + 60946,4u^2 + 0,554742p^2 - 553321,2u \\ + 1987,50p - 346,084pu = (\delta - \delta')^2.$$

L'élimination de $\delta - \delta'$ donne

$$(2) \quad 1192632,4 + 0,466142p^2 - 429154,1u + 1484,64p - 334,002pu = 0.$$

Enfin l'élimination de u entre les équations (1) et (2) conduit à l'équation

$$(3) \quad 593180,24 - 24306,3p - 30,6731p^2 - 0,011415p^3 = 0.$$

Cette équation (3) a une seule racine positive comprise entre 2,68 et 2,69; or, la valeur $p = 23,68$ nous ayant servi de point de départ dans nos calculs relatifs à Hobart-Town, l'équation (3) nous donne également la valeur de p avec l'approximation de $0'',01$.

34. Les stations d'Irkutsk et de Hobart-Town ont été recommandées comme avantageuses. Pour Irkutsk, en effet, la durée du passage excède de 11 minutes celle qui serait observée du centre de la Terre; pour Hobart-Town, elle lui est inférieure de 10 minutes; ce qui fait entre les durées une différence de 21 minutes. Il sera difficile, à ce que nous croyons, si l'on veut employer la méthode de Halley, d'en trouver de meilleures. Nous n'avons pas ici à nous préoccuper de ces différences, et disons seulement que l'observation complète du passage faite de l'une ou de l'autre de ces stations nous conduit à une équation du troisième degré en p , *donnant la différence des parallaxes à un centième de seconde, si, de ces stations, l'instant des quatre contacts a été observé avec l'approximation d'un dixième de seconde.*

35. Considérons actuellement la station de Saïgon, pour laquelle la durée du passage n'excède que d'une minute la durée observée du centre de la Terre.

Saïgon (Cochinchine).

Longitude..... $6^h 57^m 26^s$ E.

Latitude corrigée.... $10^\circ 42' 27''$ N.

Parallaxe pour cette latitude $p = 23'',73$.

Premier contact extérieur. — Le calcul a donné

$$20^h 56^m 18^s,6 \text{ (heure de Saïgon).}$$

Adoptant ce nombre, et désignant par $24 + u$ l'heure de la conjonction, on trouve

$$t = -3,06150 - u,$$

$$x = 663,265 - 62,530 u,$$

$$y = -731,156 - 238,823 u,$$

$$D^{\text{on}} \odot = 22^{\circ} 48' 47'',$$

$$H = 315^{\circ} 58' 27'',$$

$$x' = 0,444842 p,$$

$$y' = 0,682891 p;$$

d'où résulte l'équation

$$974517,28 + 60946,4 u^2 + 0,664225 p^2 + 266290,0 u \\ + 408,516 p + 381,812 pu = (\lambda + \lambda')^2.$$

Dernier contact extérieur. — Heure du contact :

$$25^h 36^m 6^s,6,$$

$$t = 1,60183 - u,$$

$$x = 954,862 - 62,530 u,$$

$$y = 382,553 - 238,823 u,$$

$$D^{\text{on}} \odot = 22^{\circ} 49' 39'',$$

$$H = 25^{\circ} 54' 15'',$$

$$x' = 0,514146 p,$$

$$y' = -0,429262 p;$$

équation :

$$1058107,7 + 60946,4 u^2 + 0,448612 p^2 - 302139,95 u \\ - 653,443 p - 140,736 pu = (\lambda + \lambda')^2.$$

L'élimination de $\lambda + \lambda'$ donne

$$(1) \quad 83598,12 - 0,215613 p^2 - 568425,7 u - 1061,948 p - 522,548 pu = 0.$$

Premier contact intérieur. — Heure du contact :

$$\begin{aligned} & 21^h 23^m 44^s, 4, \\ & t = -2,604\,333 - u, \\ & x = 691,851 - 62,530\,u, \\ & y = -621,973 - 238,823\,u, \\ & D^{\text{on}} \odot = 22^\circ 48' 52'', \\ & H = 322^\circ 49' 48'', \\ & x' = 0,474\,867\,p, \\ & y' = 0,593\,732\,p; \end{aligned}$$

équation :

$$\begin{aligned} & 865\,509,45 + 60\,946,4\,u^2 + 0,577\,898\,p^2 + 210\,560,5\,u \\ & + 81,3729\,p + 342,933\,pu = (\lambda - \lambda')^2. \end{aligned}$$

Dernier contact intérieur. — Heure du contact :

$$\begin{aligned} & 25^h 8^m 54^s, 4, \\ & t = 1,148\,444 - u, \\ & x = 926,512 - 62,530\,u, \\ & y = 274,274 - 238,823\,u, \\ & D^{\text{on}} \odot = 22^\circ 49' 34'', \\ & H = 19^\circ 6' 16'', 5, \\ & x' = 0,531\,433\,p, \\ & y' = -0,321\,595\,p; \end{aligned}$$

équation :

$$\begin{aligned} & 933\,650,7 + 60\,946,4\,u^2 + 0,385\,844\,p^2 - 246\,875,5\,u \\ & - 808,348\,p - 87,147\,pu = (\lambda - \lambda')^2. \end{aligned}$$

L'élimination de $\lambda - \lambda'$ donne

$$(2) \quad 68\,141,26 - 0,192\,054\,p^2 - 457\,435,98\,u - 889,721\,p - 430,080\,pu = 0.$$

Enfin l'élimination de u entre les équations (2) et (3) donne

$$(3) \quad 492\,506,12 - 20\,313,15\,p - 18,7378\,p^2 - 0,007\,6265\,p^3 = 0.$$

Cette équation (3) admet une racine positive unique comprise entre 23,72 et 23,73; or $p = 23,73$ est la valeur qui nous a servi de point de départ. *Donc l'équation fournie par les observations de Saïgon donne la même approximation que celles qui ont été déduites des observations d'Irkutsk et de Hobart-Town, bien qu'à Saïgon la durée du passage soit sensiblement la même que pour le centre de la Terre.*

L'équation que fournirait l'observation de Calcutta, où la durée du passage excède de 3 minutes celle qui serait observée du centre de la Terre, conduit à la même conclusion relativement à l'approximation de p .

36. La valeur de p connue, on passera à la valeur équatoriale correspondante p_1 au moyen de la formule

$$p_1 = p(1 + a \sin^2 \lambda),$$

et on déduira facilement de p_1 la parallaxe équatoriale du Soleil.

Soit en effet π cette parallaxe, Π celle de la planète, R et r les rayons vecteurs de la Terre et de la planète donnés par les Éphémérides à l'époque du passage. Les centres de la Terre, de la planète et du Soleil étant en ligne droite lors du passage, nous aurons la proportion

$$\frac{\pi}{\Pi} = \frac{R - r}{R},$$

et, puisque

$$\Pi - \pi = p_1,$$

on aura

$$\frac{\pi}{p_1} = \frac{R - r}{r};$$

p_1 ayant été trouvé, comme on l'a expliqué plus haut, l'équation précédente fera connaître π ou la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil.

N'ayant pas à notre disposition les Éphémérides de la planète pour 1874, nous nous abstenons de faire des calculs qui, du reste, n'offrent aucune difficulté.

Conclusion.

Il résulte de nos calculs :

1° Que si, d'un lieu donné, on observe l'instant de chacun des quatre contacts avec l'approximation de $0^s,1$ (*), on pourra déduire de ces observations une équation du troisième degré faisant connaître la différence des parallaxes de Vénus et du Soleil, et, par suite, celle du Soleil avec l'approximation d'un centième de seconde; et, pour arriver à un pareil résultat, il suffira d'employer les Tables de logarithmes à sept décimales.

2° Que l'approximation d'un centième de seconde, pour la différence des parallaxes, sera obtenue *sans qu'il soit nécessaire de connaître exactement les diamètres apparents du Soleil et de la planète, sans qu'il soit nécessaire non plus de connaître exactement ni la longitude du lieu d'observation, ni l'heure locale, ni l'instant de la conjonction en ascension droite*. Les seules choses à connaître d'une manière précise sont : les mouvements de la planète en ascension droite et en déclinaison, la déclinaison de cette dernière lors de la conjonction, et l'instant de chacun des quatre contacts, lesquels pourront d'ailleurs être observés au moyen d'une horloge qui ne marquerait pas *exactement* l'heure locale.

3° Que *les valeurs déduites des observations de Saïgon et de Calcutta sont aussi approchées que celles qui seraient déduites d'observations faites à Irkutsk et à Hobart-Town où l'effet de parallaxe sur la durée du phénomène est considérable*. Les observations faites de stations plus rapprochées de l'un ou de l'autre pôle ne nous donneraient pas d'ailleurs une approximation plus grande. Sera-t-il nécessaire, d'après cela, en vue de l'exactitude, de pénétrer au cœur de la Sibérie ou d'aborder la terre Adélie dans l'hémisphère austral? Nous ne le pensons pas, à moins que la méthode de Halley ne donne, ce que nous ignorons d'ail-

(*) L'approximation de $0^s,1$ sera difficile à obtenir, peut-être, surtout pour le premier contact extérieur; mais n'y a-t-il pas lieu d'espérer que, grâce aux recherches des habiles observateurs qui s'occupent de la question, on arrive, même pour ce premier contact, à un degré de précision suffisant?

leurs, des résultats beaucoup plus approchés que celle dont nous nous sommes servi.

Le *Nautical Almanac* nous indique des localités pourvues d'observatoires publics qui seront des stations avantageuses : Calcutta, Madras, dans l'Indoustan; Sidney, Melbourne, en Australie. On peut ajouter à cette énumération Batavia, Singapore, Canton, Saïgon, etc., tous les lieux, en un mot, d'où l'on pourra observer dans de bonnes conditions l'entrée et la sortie. On déterminera facilement tous ces lieux en faisant usage d'un globe terrestre, conformément à la règle donnée n° 16.

Note. — Nous avons regardé, dans notre travail, les mouvements de la planète et du Soleil comme rigoureusement uniformes pendant la durée du passage. Cela est permis pour le Soleil; il s'agit de reconnaître s'il en est de même pour la planète.

A défaut des *Éphémérides* de 1874, nous avons consulté celles de 1866. On sait que, tous les huit ans, les conjonctions se reproduisent sensiblement dans les mêmes circonstances, et en effet la conjonction inférieure de 1866 a lieu le 11 décembre.

Ce sont les résultats fournis par la *Connaissance des Temps*, pour la présente date, qui vont nous servir dans la discussion qui suit.

Mouvement en déclinaison de ♀.

Date.	Déclinaison.	Δ	Δ^s
1866. Décembre 11	22° 27' 12", 1	"	"
" " 12	22° 8' 45", 4	— 18' 26", 7	"
" " 13	21° 50' 18", 5	— 18' 26", 9	0", 2

Mouvement en ascension droite de Vénus.

Date.	Ascension droite.	Δ	Δ^s
1866. Décembre 11	17 ^h 14 ^m 52 ^s , 80	"	"
" " 12	17 ^h 12 ^m 21 ^s , 16	— 2 ^m 31 ^s , 64	"
" " 13	17 ^h 9 ^m 50 ^s , 98	— 2 ^m 30 ^s , 18	1 ^s , 46

Il résulte de l'inspection des deux tableaux ci-dessus que, si le mouvement en déclinaison peut être regardé comme rigoureusement uniforme pendant la durée du passage, il n'en est pas de même du mouvement en ascension droite, pour lequel il faut faire une correction.

Voici la manière d'opérer qui nous paraît la plus commode.

Nous regardons, dans une première approximation, le mouvement en ascension droite comme rigoureusement uniforme, et s'il s'agit de Hobart-Town, par exemple, nous arriverons aux équations (1) et (2) [n° 33].

La résolution de ces équations donne

$$p = 23'',67, \quad u = 2,8098.$$

Ayant obtenu un premier système de valeurs approchées, il faut tenir compte des termes du second ordre affectant le mouvement en ascension droite.

Pour cela, on fera usage de la formule

$$h \cos D' + t \left(\eta \cos D' + \frac{\delta}{2} \sin h \sin D' \right),$$

qui fait connaître la vitesse moyenne entre l'époque de la conjonction et celle qui répond au temps t écoulé depuis cette époque (n° 23).

Les lettres entrant dans cette dernière formule ont des significations connues; quant à la valeur de η , d'après le second tableau, et puisque le mouvement du Soleil est uniforme, elle est, en se reportant à la formule d'interpolation de Newton,

$$\eta = \frac{1'',46 \times 15}{2 \times 24^2} = 0'',019,$$

et l'on trouve, en effectuant les calculs,

$$\eta \cos D' + \frac{\delta}{2} \sin h \sin D' = 0'',030;$$

et, pour l'expression de la vitesse moyenne,

$$h \cos D' + 0'',019 t = 238'',823 + 0,030 t.$$

Pour Hobart-Town, la valeur de t au premier contact extérieur est (n° 33)

$$t = -0,3476 - 2,8098 = -3,1574.$$

La vitesse moyenne sera, par conséquent,

$$238'',823 - 0,030 \times 3,1574 = 238'',728,$$

avec une erreur qui n'affecte pas le troisième ordre décimal.

D'après cela, en désignant par γ l'ordonnée de la planète, lors du premier contact extérieur, on aura

$$\gamma = -82,967 - 238,728 u.$$

La valeur de x reste ce qu'elle est au n° 33.

On formera l'équation du second degré en p et u relative au premier contact extérieur; on formera de la même manière celle qui est relative au dernier contact extérieur, et l'élimination de $\delta + \delta'$ entre les deux équations conduit à une équation de la forme

$$(1) \quad a + bp^2 + cpu + \delta u + fp + \epsilon u^2 = 0,$$

dans laquelle les termes n'auront pas identiquement les mêmes coefficients que dans l'équation (1) [n° 33], et qui d'ailleurs contient un terme en u^2 affecté d'un coefficient relativement petit.

La considération des contacts intérieurs nous conduira à l'équation

$$(2) \quad a' + b'p^2 + c'pu + \delta'u + f'p + \epsilon'u^2 = 0,$$

qui donne lieu aux mêmes remarques que l'équation (1).


On remplacera, dans ces équations (1) et (2), u et p par $u + du$, $p + dp$, et cette substitution conduira à des équations de la forme

$$m + dp(bp + cu + f) + du(cp + 2\epsilon u + \delta) = 0,$$

$$m' + dp(b'p + c'u + f') + du(c'p + 2\epsilon'u + \delta') = 0.$$

On tirera de ces deux équations les valeurs de dp que l'on ajoutera à la valeur précédemment obtenue pour p , et l'on déterminera finalement la valeur de cette inconnue avec l'approximation d'un centième de seconde.

Si nous n'avons pas rapporté ici les résultats de nos calculs numériques, cela tient à ce que, n'ayant pas les Éphémérides de 1874 à notre disposition, nos calculs n'avaient pas le degré de précision convenable. Du reste, cette omission n'infirmes en rien les conclusions posées dans notre travail.



THÉORIE FONDAMENTALE
DES
ESPACES DE COURBURE CONSTANTE,

PAR M. E. BELTRAMI,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE.

Traduit de l'italien par M. J. HOÜEL.

(Extrait des *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2^e série, t. II, p. 232.)

Dans un Mémoire inséré au tome VII de la première série des *Annali di Matematica* (Rome, 1866), j'ai étudié les surfaces douées de la propriété d'avoir leurs lignes géodésiques représentées par des équations linéaires, et j'ai trouvé que cette propriété se vérifie pour les seules surfaces de courbure constante et pour certaines variables spéciales que l'analyse du problème a spontanément introduites.

Dans le présent Mémoire, j'expose les résultats beaucoup plus généraux auxquels m'a conduit le développement ultérieur de cette conception, combinée avec quelques principes tracés par Riemann dans son remarquable travail posthume : *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, publié récemment par M. Dedekind dans le treizième volume des *Mémoires de Göttingue*. J'espère que mes recherches pourront faciliter l'intelligence de quelques parties de cette profonde étude.

Certaines locutions, dont je fais, pour abréger, un fréquent usage, ne paraîtront, je crois, ni forcées, ni obscures à celui qui s'attachera plus au fond qu'à la forme. Le lecteur attentif n'aura besoin d'aucun effort pour les entendre sans plus d'explications, en restant d'ailleurs complètement libre de ne leur attribuer qu'une signification purement analytique.

L'expression différentielle

$$(1) \quad ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}}{x},$$

où x, x_1, x_2, \dots, x_n sont $n + 1$ variables réelles liées par l'équation

$$(2) \quad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2,$$

tandis que R et a sont constantes, peut être regardée comme représentant l'*élément linéaire*, ou la distance de deux points infiniment voisins, dans un *espace* de n dimensions, dont chaque *point* est défini par un système de valeurs des n *coordonnées* x_1, x_2, \dots, x_n . La forme de cette expression détermine la *nature* de cet espace.

En posant, pour abréger,

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2},$$

les *lignes géodésiques* de l'espace en question sont celles qui satisfont à l'équation

$$\delta \int \frac{\Omega}{x} = 0,$$

avec la condition $x \delta x + x_1 \delta x_1 + \dots + x_n \delta x_n = 0$. Au moyen des transformations ordinaires de la variation d'une intégrale, la première équation peut se développer ainsi :

$$\int \left\{ \delta x \left[\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) \right] + \delta x_1 \cdot d \left(\frac{dx_1}{x\Omega} \right) + \dots + \delta x_n \cdot d \left(\frac{dx_n}{x\Omega} \right) \right\} = 0,$$

et, en ayant égard à la relation qui lie les variations $\delta x, \delta x_1, \dots, \delta x_n$, cette équation se décompose dans les suivantes :

$$\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) = kx, \quad d \left(\frac{dx_1}{x\Omega} \right) = kx_1, \dots, \quad d \left(\frac{dx_n}{x\Omega} \right) = kx_n.$$

k étant un facteur qui reste à déterminer. Or, en multipliant ces équations respectivement par x, x_1, \dots, x_n , et faisant la somme, on a

$$d\left(\frac{x dx + x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n}{x \Omega}\right) = k(x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2);$$

done, en vertu de l'équation (2), $k = 0$, et, par suite,

$$(3) \quad d\left(\frac{dx}{x \Omega}\right) + \frac{\Omega}{x^2} = 0,$$

$$(4) \quad dx_1 = c_1 x \Omega, \quad dx_2 = c_2 x \Omega, \dots, \quad dx_n = c_n x \Omega,$$

c_1, c_2, \dots, c_n étant des constantes. Ces n dernières équations, étant élevées au carré et sommées, donnent

$$(5) \quad \Omega = -\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

en faisant

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}.$$

Cette valeur de Ω rend identique l'équation (3), dont il est, par conséquent, inutile de tenir compte; tandis que les équations (4), en éliminant $x \Omega$ et intégrant ensuite, donnent

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \dots, \quad x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}.$$

Donc les lignes géodésiques de l'espace considéré sont représentées par $n - 1$ équations linéaires entre les n coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , de même que cela a lieu dans le plan et dans l'espace ordinaire, lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes, et dans les surfaces de courbure constante, quand on emploie les variables u, v du Mémoire cité. Parmi les systèmes de lignes géodésiques, il faut noter en particulier ceux qui s'obtiennent en égalant toutes les coordonnées, à l'exception d'une seule, à autant de constantes. Par chaque point de l'espace passe une ligne géodésique de chacun de ces systèmes, auxquels appartiennent les axes coordonnés eux-mêmes des x_1 , des x_2, \dots , des x_n , pour chacun desquels les coordonnées restantes sont toutes nulles : nous les appellerons les *systèmes des x_1 , des x_2, \dots , des x_n* .

Pour obtenir la longueur de l'arc géodésique ρ , compris entre deux points donnés, observons que, d'après l'équation (5), on a

$$d\rho = R \frac{\Omega}{x} = - \frac{R dx}{x \sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

d'où

$$cx = \frac{1}{\cosh \frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

ρ_0 étant une constante arbitraire, et x désignant la fonction

$$\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}.$$

Si l'on représente par $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ les valeurs des coordonnées au point $\rho = 0$, c'est-à-dire à l'origine de l'arc, et par x^0 la valeur correspondante de la fonction x , il vient

$$(6) \quad cx^0 = \frac{1}{\cosh \frac{\rho_0}{R}},$$

d'où, en éliminant c ,

$$x = \frac{x^0 \cosh \frac{\rho_0}{R}}{\cosh \frac{\rho - \rho_0}{R}},$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$(7) \quad \frac{x^2 \sinh^2 \frac{\rho}{R}}{\cosh^2 \frac{\rho_0}{R}} = 2xx^0 \cosh \frac{\rho}{R} - x^2 - x^{0^2}.$$

D'autre part, comme on a, par les équations précédentes,

$$x\Omega = \frac{x^2 d\rho}{R} = \frac{1}{c^2} \cdot d \tanh \frac{\rho - \rho_0}{R},$$

les équations (4) donnent

$$x_1 = a_1 + \frac{c_1}{c^2} \tanh \frac{\rho - \rho_0}{R}, \quad x_2 = a_2 + \frac{c_2}{c^2} \tanh \frac{\rho - \rho_0}{R}, \dots,$$

ou en introduisant, au lieu des constantes a_1, a_2, \dots , les quantités x_1^0, x_2^0, \dots ,

$$x_1 - x_1^0 = c_1 x x^0 \sinh \frac{\rho}{R}, \quad x_2 - x_2^0 = c_2 x x^0 \sinh \frac{\rho}{R}, \dots,$$

d'où, en élevant au carré et faisant la somme,

$$2(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0) - x^2 - x^0 = c^2 x^2 x^0 \sinh^2 \frac{\rho}{R}.$$

Cette équation, en vertu des équations (6) et (7), donne finalement

$$(8) \quad \cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)(a^2 - x_1^0{}^2 - x_2^0{}^2 - \dots - x_n^0{}^2)}},$$

et c'est là la formule générale qui fait connaître la longueur d'un arc géodésique en fonction des coordonnées de ses extrémités.

En supposant *réelles* les variables x, x_1, \dots, x_n et les constantes R, a , la limite de l'espace de n dimensions que nous considérons est l'espace de $n - 1$ dimensions donné par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2.$$

A l'intérieur de cette limite, c'est-à-dire pour

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < a^2,$$

le premier espace est *continu et simplement connexe*. De l'équation (8) il s'ensuit encore que les points appartenant à l'espace-limite sont tous à une distance *infinie*.

Dans tout le champ réel que nous venons de définir, la valeur de ds , donnée par l'équation (1), reste constamment positive pour tout système de valeurs des rapports

$$dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n.$$

Si l'on considère un second système d'accroissements $\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_n$, et que l'on pose

$$\partial s^2 = R^2 \frac{\partial x^2 + \partial x_1^2 + \dots + \partial x_n^2}{x^2},$$

l'expression

$$ds^2 \partial s^2 = R^2 \frac{(dx \partial x + dx_1 \partial x_1 + \dots + dx_n \partial x_n)^2}{x^4}$$

ne peut jamais devenir négative (en vertu d'une transformation bien connue dont elle est susceptible); par conséquent, la quantité

$$\frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \dots + dx_n\delta x_n)}{x^2 ds \delta s}$$

ne peut jamais devenir plus grande que l'unité. On peut donc toujours assigner un angle réel θ , pour lequel on ait

$$(9) \quad dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \dots + dx_n\delta x_n = \frac{x^2 ds \delta s}{R^2} \cos \theta.$$

De cette possibilité résulte cette conséquence importante, que, en calculant au moyen de l'équation (1) les trois valeurs de ds qui correspondent aux trois systèmes suivants de valeurs des variables, considérés deux à deux,

$$\begin{aligned} (x_1, \quad x_2, \quad \dots, x_n), \\ (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n), \\ (x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n), \end{aligned}$$

on trouve trois nombres propres à exprimer les longueurs des trois côtés d'un triangle rectiligne. Indiquons, en effet, par M, M', M'' les trois systèmes de valeurs en question, et représentons ds par $MM', \delta s$ par MM'' . Les valeurs du système M'' peuvent se déduire de celles du système M' au moyen des accroissements respectifs

$$\delta x_1 - dx_1, \quad \delta x_2 - dx_2, \dots, \quad \delta x_n - dx_n,$$

attribués à ces dernières. Par suite, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, on pourra poser

$$\begin{aligned} \overline{M'M''}^2 &= \frac{R^2}{x^2} [(\delta x - dx)^2 + (\delta x_1 - dx_1)^2 + \dots + (\delta x_n - dx_n)^2] \\ &= ds^2 + \delta s^2 - 2 \frac{R^2(dx\delta x + dx_1\delta x_1 + \dots + dx_n\delta x_n)}{x^2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 - 2\overline{MM'} \cdot \overline{MM''} \cdot \cos \theta,$$

θ étant un angle réel. Cette équation démontre la propriété énoncée, et fait comprendre comment on peut assimiler tout système de valeurs des

variables x_1, x_2, \dots, x_n à un *point* défini par ses coordonnées. C'est dans le même ordre d'idées que l'on considère deux éléments linéaires $ds, \delta s$ comme *orthogonaux*, lorsqu'on a, pour ces éléments, $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire (9) lorsque les accroissements correspondants d, δ satisfont à la condition

$$(10) \quad dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n = 0,$$

que l'on peut appeler, pour la commodité du langage, la *condition d'orthogonalité*.

Considérons, par exemple, l'espace de $n - 1$ dimensions $x_1 = 0$, et supposons que d'un de ses points partent deux éléments linéaires, l'un ds situé dans l'espace lui-même, l'autre δs dirigé suivant la ligne géodésique du système x_1 , passant par ce point. Dans ce cas, on a

$$x_1 = 0, \quad dx_1 = 0, \quad \delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_n = 0, \quad \delta x = 0,$$

et, par suite, la condition d'orthogonalité est satisfaite, c'est-à-dire que chaque ligne géodésique du système x_1 (ou, plus généralement, du système x_r) est orthogonale à l'espace $x_1 = 0$ (ou $x_r = 0$) au point où elle le rencontre. Donc, en particulier, à l'origine des coordonnées, les directions des n axes sont toutes orthogonales entre elles. On démontre avec la même facilité que l'axe des x_r est orthogonal à tous les espaces $x_r = \text{const.}$ Les n lignes géodésiques menées d'un point arbitraire de l'espace dans les systèmes x_1, x_2, \dots, x_n sont perpendiculaires aux espaces de $n - 1$ dimensions $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, d'une manière analogue à ce qui a lieu dans le plan et dans l'espace ordinaire, quand on emploie les coordonnées rectangles. En appelant X_1, X_2, \dots, X_n les portions de ces lignes géodésiques comprises entre le point donné et les espaces auxquels elles sont respectivement perpendiculaires, on a

$$(11) \quad X_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{x^2 + x_r^2} + x_r}{\sqrt{x^2 + x_r^2} - x_r}.$$

Considérons le système complet des lignes géodésiques issues du point déterminé $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Il sera représenté par le système

suivant d'équations différentielles, dont la dernière est une conséquence des premières,

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_1^0} = \frac{dx_2}{x_2 - x_2^0} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - x_n^0} = \frac{dx}{x - \frac{z}{x}},$$

en posant, pour abréger,

$$z = a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0.$$

La condition (10) donne, pour l'équation différentielle de l'espace de $n - 1$ dimensions orthogonal à toutes ces lignes géodésiques, la suivante :

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant

$$(12) \quad \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = C.$$

En comparant cette équation avec l'équation (8), on voit que l'espace qu'elle définit est aussi le lieu des points équidistants du point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$; et, en appelant ρ la distance constante, on a

$$C = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2} \cdot \cosh \frac{\rho}{R} = x^0 \cosh \frac{\rho}{R}.$$

Comme l'équation (12), d'après la manière dont elle a été obtenue, subsiste encore quand le point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ s'en va à l'infini, c'est-à-dire quand x^0 devient nul et ρ infini, on voit ainsi que, dans ce cas, le produit $x^0 \cosh \frac{\rho}{R}$ converge vers une limite finie, qui ne peut différer de celle du produit $\frac{1}{2} x^0 e^{\frac{\rho}{R}}$. En écrivant donc $\rho' = \rho$ au lieu de ρ , et faisant aller à l'infini le point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, tandis que ρ reste constant, on trouve, à la limite, l'équation

$$(13) \quad \frac{(a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots - x_n x_n^0)}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} = h e^{-\frac{\rho}{R}},$$

où l'on a

$$x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0 = a^2,$$

et cette équation représente un système d'espaces de n dimensions qui peuvent être définis comme les *trajectoires orthogonales de toutes les lignes géodésiques qui convergent vers un même point à l'infini* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Les diverses trajectoires se distinguent entre elles par les valeurs du paramètre ρ , qui exprime la distance *constante* entre une quelconque d'entre elles et la trajectoire déterminée $\rho = 0$. La constante k est donnée quand on donne un point de cette dernière trajectoire.

Nous démontrerons tout à l'heure que la nature de l'espace considéré jusqu'ici est telle, que, si l'on en limite une portion quelconque et qu'on la transporte dans une position différente de celle qu'elle occupait d'abord, on peut toujours obtenir sa *superposition* avec une autre portion correspondante du même espace. Pour concevoir comment cela peut avoir lieu, imaginons, disséminés dans cette partie de l'espace, un nombre ∞^n de points infiniment voisins les uns des autres et réunis deux à deux par les petits arcs géodésiques qui en mesurent les distances mutuelles. Cela posé, la *superponibilité* dont il s'agit consiste en ce que, en toute autre partie de l'espace considéré, on peut disséminer des points *appartenant* à cet espace, et qui ont entre eux les mêmes distances mutuelles et la même disposition qu'avaient ceux de la portion imaginée; de telle sorte que le réseau n^{upl} , formé par les lignes qui joignent les points contigus de cette portion, peut être complètement identifié avec le réseau analogue de l'autre portion, sans que les liaisons des points doivent être en aucun lieu rompues ou redoublées. Les altérations que le premier réseau doit subir pour s'identifier avec le second ne peuvent d'ailleurs devenir *apparentes* que lorsqu'on les considère l'un et l'autre *par rapport à un espace ayant plus de n dimensions*; tant qu'il n'en est pas ainsi, les deux réseaux présentent le caractère de l'*égalité* par *coïncidence* ou par *symétrie*. Cette dernière observation se rattache à une ingénieuse réflexion de Möbius (*Barycentrischer Calcul*, p. 184).

Supposons d'abord l'espace rapporté à un nouveau système d'axes géodésiques, des y_1, y_2, \dots, y_n , ayant même origine que les premiers et, comme ceux-ci, orthogonaux entre eux. Comme toutes les lignes géodésiques sont représentées par des équations linéaires, il est clair que les substitutions, pour passer des variables x aux variables y , doivent être *linéaires*; mais il est facile de se convaincre, en outre, que leur

forme doit être celle que nous avons appelée *orthogonale*. En effet, la forme (8) montre que la distance de l'origine à un point quelconque (x_1, x_2, \dots, x_n) ne dépend que de la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. On aura donc

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2, \\ dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 &= dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2}{y^2}.$$

Cette identité de forme des deux éléments montre bien que deux réseaux dont les sommets correspondants seraient liés par les équations

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots, \quad x_n = y_n$$

seraient parfaitement superposables. Or il est clair que le second de ces réseaux ne serait autre chose que le premier, qu'on aurait fait tourner autour de l'origine en même temps que les axes primitifs jusqu'à ce que ceux-ci prissent la direction des nouveaux. Il est donc prouvé que la superponibilité dont nous parlions a lieu effectivement quand le déplacement se réduit à une simple rotation autour de l'origine. De plus, comme on pourrait poser plus généralement

$$x_1 = \pm y_1, \quad x_2 = \pm y_2, \dots, \quad x_n = \pm y_n,$$

avec la faculté de combiner les signes d'une manière quelconque, il est clair que, outre l'égalité par *coïncidence*, il y a plusieurs espèces d'égalité par *symétrie*.

Puisqu'un changement d'axes, l'origine restant fixe, n'altère pas la forme de l'élément linéaire, il reste maintenant à rechercher l'effet d'un changement d'origine. Et puisque, en prenant dans l'espace un point quelconque, on peut déjà supposer l'axe des x , dirigé vers ce point, il est donc permis de prendre la nouvelle origine sur cet axe au point $x_1 = a_1$. La nouvelle transformation à effectuer consiste donc à conserver l'axe des x , et les systèmes coordonnés précédents des x_2, x_3, \dots, x_n , et à substituer au système des lignes géodésiques perpendiculaires à l'espace $x_1 = 0$ celui des lignes géodésiques perpendicu-

laires à l'espace $x_1 = a_1$, parmi lesquelles se trouve l'axe primitif des x_1 . Appelons les nouvelles coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n , et soit b une constante qui joue par rapport à celles-ci le même rôle que la constante a par rapport aux x . Nous désignerons pareillement par Y_1, Y_2, \dots, Y_n les lignes géodésiques analogues à X_1, X_2, \dots, X_n , et l'on aura évidemment, comme dans la formule (11),

$$Y_r = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{y^2 + y_r^2} + y_r}{\sqrt{y^2 + y_r^2} - y_r}.$$

Cela posé, observons que, en laissant invariables les systèmes primitifs des x_2, x_3, \dots, x_n , on a d'abord pour ces systèmes $X_r = Y_r$, et, par suite,

$$(14) \quad \frac{x_r}{x} = \pm \frac{y_r}{y}, \quad \text{pour } r = 2, 3, \dots, n.$$

En élevant au carré et sommant d'abord ces équations, puis leurs différentielles, on a les deux formules

$$(15) \quad \begin{cases} (a^2 - x_1^2)y^2 = (b^2 - y_1^2)x^2, \\ \frac{\Omega^2}{x^2} + \left(d\frac{a}{x}\right)^2 - \left(d\frac{x_1}{x}\right)^2 = \frac{\Theta^2}{y^2} + \left(d\frac{b}{y}\right)^2 - d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2, \end{cases}$$

où l'on a fait $\Theta^2 = dy^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2$. En second lieu, si l'on considère, sur l'axe des x_1 , les portions X_1^0, Y_1^0 interceptées entre les deux origines et le point où l'axe lui-même est coupé par l'espace $x_1 = x_1$, on a

$$X_1^0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + x_1}{a - x_1}, \quad Y_1^0 = \frac{R}{2} \log \frac{b + y_1}{b - y_1},$$

tandis que la distance entre les deux origines a pour valeur

$$\frac{R}{2} \log \frac{a + a_1}{a - a_1}.$$

Il est donc clair qu'il faut poser

$$X_1^0 = Y_1^0 + \frac{R}{2} \log \frac{a + a_1}{a - a_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)} = \frac{b+y_1}{b-y_1},$$

d'où

$$(16) \quad y_1 = \frac{ab(x_1 - a_1)}{a^2 - a_1 x_1}, \quad x_1 = \frac{a(ay_1 + a_1 b)}{ab + a_1 y_1}.$$

Ces deux formules donnent lieu aux relations

$$(17) \quad a^2 - x_1^2 = \frac{a^2(a^2 - a_1^2)(b^2 - y_1^2)}{(ab + a_1 y_1)^2}, \quad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2(a^2 - a_1^2)(a^2 - x_1^2)}{(a^2 - a_1 x_1)^2},$$

lesquelles, combinées convenablement avec la première des équations (15), conduisent aux deux suivantes :

$$\frac{a}{x} \sqrt{a^2 - a_1^2} = a \frac{b}{y} + a_1 \frac{y_1}{y},$$

$$\frac{x_1}{x} \sqrt{a^2 - a_1^2} = a_1 \frac{b}{y} + a \frac{y_1}{y};$$

d'où

$$\left(d \frac{a}{x}\right)^2 - \left(d \frac{x_1}{x}\right)^2 = \left(d \frac{b}{y}\right)^2 - \left(d \frac{y_1}{y}\right)^2.$$

En vertu de cette dernière équation, la seconde des équations (15) donne

$$\frac{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x^2} = \frac{dy^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2}{y^2},$$

d'où il s'ensuit que l'expression de l'élément linéaire conserve encore la même forme lorsqu'on change l'origine, et, en conséquence, par un raisonnement analogue à celui de tout à l'heure, que la superponibilité a lieu dans tous les cas, puisqu'il suffirait maintenant d'employer une nouvelle substitution orthogonale pour rendre les nouveaux axes complètement indépendants des premiers.

Les équations (14), (15, première), (17) donnent

$$x_r = \pm \frac{ay_r \sqrt{a^2 - a_1^2}}{ab + a_1 y_1}, \quad \text{pour } r = 2, 3, \dots, n;$$

de là et de l'équation (16, seconde), on conclut que la transformation d'axes la plus générale a lieu au moyen de *substitutions homographiques*.

En faisant abstraction de cette transformation des coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n en d'autres de la même espèce, il y a d'autres transformations qui donnent à l'élément une forme remarquable. Cette transformation, que l'on peut appeler *polaire*, s'obtient en posant premièrement

$$x_1 = r\lambda_1, \quad x_2 = r\lambda_2, \dots, \quad x_n = r\lambda_n,$$

avec la condition $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$. On tire de là

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = dr^2 + r^2 d\Lambda^2,$$

en faisant $d\Lambda^2 = d\lambda_1^2 + d\lambda_2^2 + \dots + d\lambda_n^2$; par suite,

$$ds^2 = \left(\frac{Radr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2} d\Lambda^2.$$

Mais, en appelant ρ la distance géodésique de l'origine ou pôle au point (x_1, x_2, \dots, x_n) , on a

$$\frac{Radr}{a^2 - r^2} = d\rho, \quad \frac{r^2}{a^2 - r^2} = \sinh^2 \frac{\rho}{R};$$

donc

$$(18) \quad ds^2 = d\rho^2 + \left(R \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 d\Lambda^2,$$

forme qui justifie la dénomination de *polaire*, puisque les variables y sont le rayon vecteur ρ et les quantités λ qui définissent la direction de ce rayon.

De cette forme on passe facilement à une autre, que l'on pourrait appeler *stéréographique*, et qui s'obtient en posant

$$\xi_r = 2R \tanh \frac{\rho}{2R} \cdot \lambda_r,$$

ρ et λ_r ayant les mêmes significations que tout à l'heure. De là on tire

$$\lambda_r d\rho + R \sinh \frac{\rho}{R} \cdot d\lambda_r = d\xi_r \cdot \cosh^2 \frac{\rho}{2R},$$

$$\cosh^2 \frac{\rho}{2R} = \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}},$$

et, par suite, en élevant au carré et sommant les équations qui résultent de l'avant-dernière, en y faisant $r = 1, 2, \dots, n$, et ayant égard à la dernière et à l'équation (18),

$$(19) \quad ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}}.$$

Cette forme a été donnée sans démonstration par Riemann, dans le Mémoire posthume cité (II, § 4).

Riemann a indiqué un autre système de coordonnées, dont il tire la mesure de la courbure d'un espace donné autour d'un point (II, § 2). Ces coordonnées sont, à certains égards, analogues aux coordonnées orthogonales cartésiennes, puisqu'elles se déduisent des coordonnées polaires en faisant

$$z_1 = \rho \lambda_1, \quad z_2 = \rho \lambda_2, \dots, \quad z_n = \rho \lambda_n.$$

On tire de là

$$d\lambda_r = \frac{\rho dz_r - z_r d\rho}{\rho^2},$$

et, par suite, élevant au carré et sommant,

$$d\Lambda^2 = \frac{(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)(dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2) - (z_1 dz_1 + z_2 dz_2 + \dots + z_n dz_n)^2}{\rho^4},$$

ou bien

$$d\Lambda^2 = \frac{\Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^4},$$

le signe Σ comprenant toutes les combinaisons binaires des indices. On a aussi

$$d\rho^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 - \frac{\Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^2},$$

d'où, en substituant dans (18), on tire finalement

$$(20) \quad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{R}{\rho} \sinh \frac{\rho}{R} \right)^2 - 1 \right] \Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

ou

$$(20') \quad ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2} \left(1 + \frac{2\rho^2}{15R^2} + \dots \right) \Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2,$$

où l'on a $\rho^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$, la série convergente entre parenthèses procédant suivant les puissances de $\frac{\rho}{R}$. Pour de très-petites valeurs de ρ , on peut prendre simplement

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2 + \frac{1}{3R^2} \Sigma (z_1 dz_1 - z_2 dz_2)^2.$$

Or, en considérant un élément de surface passant par l'origine, on peut faire en sorte (par un choix convenable des axes z_1, z_2, \dots , ou x_1, x_2, \dots) que cet élément coïncide avec celui de la surface $z_3 = 0, z_4 = 0, \dots, z_n = 0$, à laquelle correspond, dans le voisinage de l'origine, l'élément linéaire

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{1}{3R^2} (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2;$$

et, puisque l'aire du triangle infinitésimal qui a pour sommets les points $(0, 0), (z_1, z_2), (dz_1, dz_2)$, dont le second est infiniment voisin de l'origine, est égale à $\frac{1}{2} (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, on en conclut que $\Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$ est égal à quatre fois le carré de l'aire du triangle infinitésimal qui a pour sommets les points $(0, 0, \dots, 0), (z_1, z_2, \dots, z_n), (dz_1, dz_2, \dots, dz_n)$, dont le second est infiniment voisin de l'origine. Si donc on divise la somme des termes du quatrième ordre dans l'équation (20') par le carré de l'aire du triangle infinitésimal en question, on a pour quotient $\frac{4}{3R^2}$; et puisque, selon la définition de Riemann, ce quotient, multiplié par $-\frac{3}{4}$, exprime la mesure de la courbure dans le sens de l'élément de surface que nous considérons, on voit que, dans l'espace dont il s'agit, cette mesure est constante et $= -\frac{1}{R^2}$ dans toutes les directions autour de chaque point (*). C'est pour cela que cet espace

(*) Pour apercevoir la coïncidence de la définition de Riemann avec celle de Gauss, rappelons-nous que, d'après Gauss, la mesure de la courbure de la surface définie par l'élément

$$ds^2 = d\rho^2 + m^2 d\theta^2$$

est exprimée par $-\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{d\rho^2}$, m étant en général une fonction de ρ et de θ . Si la variable ρ

peut être convenablement désigné sous le nom d'*espace de courbure constante*.

Une quatrième transformation, très-importante, est celle que l'on obtient en introduisant n nouvelles variables indépendantes $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, et posant

$$\frac{R x}{a - x_n} = \eta, \quad \frac{R x_1}{a - x_n} = \eta_1, \quad \dots, \quad \frac{R x_{n-1}}{a - x_n} = \eta_{n-1}.$$

On en tire immédiatement

$$(21) \quad ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2}}{\eta},$$

d'où l'on conclut que la formule (1) représente encore l'élément linéaire d'un espace de courbure constante, lorsque les $n + 1$ variables x, x_1, \dots, x_n sont indépendantes entre elles et ne sont plus liées en aucune façon par la relation (2), si ce n'est que, dans ce cas, le nombre des dimensions de l'espace est $n + 1$, et que la propriété des lignes géodésiques d'être représentées par des équations linéaires ne subsiste plus (*). Mais

est la longueur d'un arc géodésique issu d'un point de la surface où celle-ci ait une courbure ordinaire, la fonction m est de la forme $m = \rho(1 + m'\rho^2)$, m' étant une fonction qui, pour $\rho = 0$, n'est ni nulle ni infinie (Voyez les *Annali di Matematica*, 2^e série, t. I, p. 358), et par suite la mesure de la courbure au point $\rho = 0$ est $-6m'_0$. Cela posé, les coordonnées de Riemann

$$z_1 = \rho \cos \theta, \quad z_2 = \rho \sin \theta$$

donnent à l'élément considéré tout à l'heure la forme

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4} \left(\frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{2} \right)^2,$$

et, par suite, la mesure de la courbure au point $\rho = 0$ est, d'après Riemann,

$$-\frac{3}{4} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{4(m^2 - \rho^2)}{\rho^4}.$$

Or

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{m^2 - \rho^2}{\rho^4} \text{ (pour } \rho = 0) = 2m'_0;$$

donc les deux expressions coïncident.

Il est clair que m'_0 , c'est-à-dire $(m')_{\rho=0}$ doit être une quantité indépendante de θ .

(*) La forme (21) a été indiquée, pour le cas de deux dimensions seulement, par M. Liouville dans ses Notes sur l'ouvrage de Monge, p. 600.

une conséquence assez remarquable qui se déduit de l'expression (21), c'est que l'espace de $n - 1$ dimensions $\eta = \text{const.}$ a sa courbure *nulle* en tous ses points, puisque son élément linéaire est de la forme

$$ds = \text{const.} \times \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2}.$$

En effet, si l'on a égard à la formule de Riemann (19), on voit immédiatement que l'élément ne peut se réduire à la racine carrée de la somme des carrés d'autant de différentielles exactes qu'il y a de dimensions, à moins que l'on n'ait $\frac{1}{R} = 0$. L'espace $\eta = \text{const.}$ est donc un de ceux que Riemann appelle *espaces plans* (II, § 1), et dans lesquels rentrent le plan et l'espace ordinaire, définis par les formules

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Maintenant l'équation $\eta = \text{const.}$ admet, après ce que nous venons de dire, une interprétation très-simple. Le point à l'infini sur l'axe des x_n a pour coordonnées

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = a,$$

et partant l'équation (13) devient, pour ce point,

$$\frac{a - x_n}{x} = k' e^{-\frac{\rho}{R}},$$

en posant $k' = \frac{k}{a}$. Donc

$$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{R}},$$

et, par conséquent, l'équation $\eta = \text{const.}$ équivaut à cette autre $\rho = \text{const.}$; d'où l'on conclut (puisque la direction de l'axe des x_n est arbitraire) que l'espace de $n - 1$ dimensions $\eta = \text{const.}$ n'est autre chose que l'une des trajectoires orthogonales de toutes les lignes géodésiques convergentes vers un même point à l'infini, c'est-à-dire d'un système de lignes géodésiques *parallèles* entre elles. Réciproquement, chacune de ces trajectoires orthogonales a en tous ses points une courbure nulle, et, par suite, deux quelconques d'entre elles (appartenant

au moins au même système) sont superposables l'une à l'autre de toutes les manières possibles.

En introduisant dans l'équation (21) la variable ρ au lieu de η , on a l'autre forme équivalente

$$(21') \quad ds^2 = d\rho^2 + h^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} (d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2).$$

On a déjà vu que l'ensemble de $n - 1$ équations linéaires entre les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n représente une ligne géodésique. Voyons ce que représente, plus généralement, l'ensemble de $n - m$ équations linéaires.

En supposant qu'on ait déduit de ces équations les expressions de $n - m$ coordonnées en fonction des m restantes, il est évident que le nombre des paramètres indépendants contenus dans un tel système est $(m + 1)(n - m)$. Imaginons maintenant que toutes les n coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n soient exprimées linéairement en fonction de m variables u_1, u_2, \dots, u_m . Ces expressions comprennent à elles toutes $(m + 1)n$ paramètres; mais, si l'on assujettit ces paramètres à vérifier l'identité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 + h^2$$

(h restant indéterminé), il est clair que l'on ajoute ainsi $\frac{m(m+1)}{2} + m$ conditions, en sorte que le nombre des paramètres indépendants qui restent sera $(m + 1)n - \frac{m(m+1)}{2} - m$. Or ce nombre surpasse de $\frac{m(m-1)}{2}$ le nombre $(m + 1)(n - m)$; donc les relations supposées entre les x et les u , avec la condition indiquée, sont telles, qu'elles peuvent toujours tenir lieu, sans aucune restriction, du système donné de $n - m$ équations. Cela posé, de ces relations, en posant

$$u^2 + u_1^2 + \dots + u_m^2 = a^2 - h^2 = a'^2,$$

on tire

$$dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2,$$

$$x^2 = u^2;$$

donc

$$ds = R \frac{\sqrt{du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2}}{u},$$

avec la condition

$$u^2 + u_1^2 + \dots + u_m^2 = a'^2.$$

Conséquemment, le lieu des points représentés par l'ensemble des $n - m$ équations linéaires entre les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n est un espace de m dimensions dont la courbure est partout constante et égale à celle de l'espace primitif.

Ainsi, par exemple, $n - 2$ équations linéaires représentent une *surface* de courbure constante $\left(= -\frac{1}{R^2} \right)$, que l'on désignera convenablement sous le nom de *surface du premier ordre*; $n - 3$ équations représentent un *espace à trois dimensions* de courbure constante $\left(= -\frac{1}{R^2} \right)$, etc.

Un ligne géodésique réelle est déterminée sans ambiguïté par *deux* points de l'espace; dans l'hypothèse admise jusqu'ici, cette propriété ne peut souffrir aucune exception.

Une surface du premier ordre est déterminée sans ambiguïté par *trois* points de l'espace. Elle contient entièrement la ligne géodésique qui passe par deux de ses points réels, en sorte que, si deux surfaces réelles du premier ordre ont deux points réels communs, elles ont également en commun toute la ligne géodésique déterminée par ces deux points.

Un triangle géodésique est toujours situé sur une surface déterminée du premier ordre, laquelle est encore déterminée lorsque le triangle est infinitésimal. C'est pourquoi, si l'on prolonge suivant des lignes géodésiques tous les éléments linéaires contenus dans un même élément de surface, les lignes géodésiques ainsi obtenues ont toutes pour lieu géométrique une surface déterminée du premier ordre.

Quand deux surfaces du premier ordre se coupent le long d'une ligne, nécessairement géodésique, leur angle est partout constant, c'est-à-dire qu'en menant par un point de leur intersection deux éléments linéaires normaux à cette intersection, l'un dans la première surface, l'autre dans la seconde, la distance infinitésimale de leurs extrémités est constante s'ils sont eux-mêmes de longueurs constantes. En effet (*), en supposant l'axe x , dirigé suivant la commune intersection des deux

(*) La démonstration suivante, qu'on aurait pu, à la rigueur, omettre, a été insérée à cause des formules auxquelles elle conduit.

surfaces, les équations de celles-ci peuvent évidemment se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}(x_2 = m_2 x_n, \quad x_3 = m_3 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n), \\ (x_2 = m'_2 x_n, \quad x_3 = m'_3 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x_n),\end{aligned}$$

les quantités m, m' étant des paramètres constants. Ces deux surfaces sont coupées par l'espace $x_1 = a_1$ suivant deux lignes géodésiques qui, d'après une remarque précédente, sont orthogonales à l'axe x_1 . Les deux points qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned}(x_1 = a_1, \quad x_2 = m_2 x_n, \dots, \quad x_{n-1} = m_{n-1} x_n, \quad x_n = x_n), \\ (x_1 = a_1, \quad x_2 = m'_2 x'_n, \dots, \quad x_{n-1} = m'_{n-1} x'_n, \quad x_n = x'_n)\end{aligned}$$

sont situés respectivement sur la première et sur la seconde surface, et précisément sur les deux lignes géodésiques dont il s'agit, et leur distance ρ est donnée (8) par la formule

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - a_1^2 - M x_n x'_n}{\sqrt{(a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2)(a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2)}},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}m^2 = 1 + m_2^2 + \dots + m_{n-1}^2, \quad m'^2 = 1 + m_2'^2 + \dots + m_{n-1}'^2, \\ M = 1 + m_2 m'_2 + \dots + m_{n-1} m'_{n-1}.\end{aligned}$$

De là, en appelant σ, σ' les longueurs des deux lignes géodésiques comprises entre le point commun $x_1 = a_1$ et les deux points considérés, on tire

$$\cosh \frac{\sigma}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \cosh \frac{\sigma'}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

et, par suite,

$$\sinh \frac{\sigma}{R} = \frac{m x_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m^2 x_n^2}}, \quad \sinh \frac{\sigma'}{R} = \frac{m' x'_n}{\sqrt{a^2 - a_1^2 - m'^2 x_n'^2}},$$

valeurs qui montrent que

$$\cosh \frac{\rho}{R} = \cosh \frac{\sigma}{R} \cosh \frac{\sigma'}{R} - \frac{M}{mm'} \sinh \frac{\sigma}{R} \sinh \frac{\sigma'}{R}.$$

Comme, dans cette formule, il ne reste plus trace du point a , pris sur l'axe x_1 , on voit qu'en menant par un point quelconque de cet axe, dans les deux surfaces, les lignes géodésiques de longueurs σ , σ' , la distance géodésique de leurs extrémités est toujours constante. Et, puisque cette propriété subsiste pour des longueurs quelconques σ , σ' , elle subsiste nécessairement pour des longueurs infinitésimales, d'où découle le théorème énoncé.

En se rappelant que, en vertu de ce qui a été démontré plus haut (p. 352), les triangles infinitésimaux sont assujettis aux relations ordinaires de la trigonométrie plane, on reconnaît immédiatement, en rendant infiniment petites les longueurs ρ , σ , σ' , que $\frac{M}{mm'}$ est le cosinus de l'angle que font les premiers éléments des deux lignes géodésiques σ , σ' , c'est-à-dire de l'angle des deux surfaces. D'autre part, il est facile de voir que le triangle actuellement considéré peut être un triangle géodésique entièrement arbitraire; donc, entre les côtés a , b , c et les angles opposés A , B , C d'un triangle géodésique situé dans l'espace considéré, on a la relation

$$(22) \quad \cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos A,$$

en même temps que ses analogues, relation qui ne diffère de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique que par le changement de R en $R\sqrt{-1}$ (R étant le rayon de la sphère), les côtés et les angles restant les mêmes. Cela concorde pleinement avec un fait déjà signalé par Minding (*Journal de Crelle*, t. XX), et démontré par Codazzi (*Annales de Tortolini*, 1857), si l'on se rappelle que le triangle géodésique considéré est situé entièrement sur une surface du premier ordre, c'est-à-dire de courbure constante négative, par rapport à laquelle il est également géodésique dans le sens ordinaire. Si l'on suppose l'angle C droit, les deux formules qui se déduisent de la formule (22) par la permutation des éléments donnent, moyennant une combinaison convenable,

$$(23) \quad \tanh \frac{a}{R} = \tanh \frac{c}{R} \cos B.$$

Si l'on imagine maintenant que le sommet de l'angle A aille en s'éloi-

gnant indéfiniment sur le côté b de l'angle droit, tandis que le côté a reste invariable de position et de grandeur, l'hypoténuse c croîtra jusqu'à l'infini, et à cette limite les équations (22), (23) donneront

$$\cos A = 1, \quad \operatorname{tanh} \frac{a}{R} = \cos B.$$

La première formule fait voir que $A = 0$, c'est-à-dire que les deux côtés b , c se rapprochent asymptotiquement, lorsque le sommet de l'angle A est à l'infini; la seconde fait voir que la limite de l'angle B n'est pas l'angle droit, comme dans le plan, mais un angle moindre que 90 degrés, dont la grandeur dépend de la distance a , au moyen de la formule

$$(24) \quad \operatorname{tang} \frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}},$$

équivalente à la précédente. Si l'on appelle *parallèles* deux lignes géodésiques convergentes vers un même point à l'infini, comme nous l'avons déjà fait, on voit, par conséquent, que par un point on peut mener *deux* lignes géodésiques distinctes, parallèles à une ligne géodésique donnée; que ces deux parallèles sont également inclinées de part et d'autre sur la ligne géodésique menée du même point normalement à la ligne donnée, et que leur inclinaison B sur la normale est liée à la longueur a de cette même normale par la relation (24). Ce résultat s'accorde pleinement avec celui qui forme la base de la *Géométrie non euclidienne*, dont les principes, déjà familiers à Gauss, ont été exposés de main de maître par Lobatchefsky, dans ses *Études géométriques sur la Théorie des Parallèles* (traduites par Hoüel, 1866), sous forme synthétique. La possibilité de sa construction au moyen de la synthèse ordinaire (en la limitant à l'espace de trois dimensions) dépend, en premier lieu, de ce que, comme on l'a démontré, dans les espaces de courbure constante (positive ou négative), toute figure *peut* être changée arbitrairement de position sans subir aucune altération dans la grandeur et dans la disposition mutuelle de ses éléments contigus, *possibilité* d'où dépend l'*existence des figures égales*, et, par suite, la *validité du principe de superposition*. En second lieu, dans les espaces de courbure constante *négative*, les lignes géodésiques sont caractérisées, comme la

droite euclidienne, par la propriété d'être déterminées sans ambiguïté par *deux* de leurs points seulement, de sorte que l'*axiome de la droite* a lieu pour ces lignes. Et pareillement, les surfaces du premier ordre sont caractérisées, comme le plan euclidien, par la propriété d'être déterminées par *trois* de leurs points seulement, de sorte que pour ces surfaces a lieu l'*axiome du plan*. En outre, les relations des lignes géodésiques avec les surfaces du premier ordre et de celles-ci entre elles sont les mêmes que celles des droites avec les plans et des plans entre eux, puisqu'une de ces surfaces contient une ligne géodésique tout entière dès qu'elle en contient deux points, et que deux de ces surfaces se coupent suivant une ligne géodésique (et sous un angle constant), si elles se rencontrent en un seul point. De cette correspondance, il s'ensuit que, si l'on admet les axiomes fondamentaux de la géométrie ordinaire, en excluant le postulat des parallèles, les théorèmes que l'on obtient sont identiques avec ceux de la géométrie de l'espace de courbure constante négative, puisque cette dernière géométrie a les mêmes bases que la première, à l'exception du postulat en question. Les théorèmes de cette géométrie subsistent pour toute valeur de la courbure, laquelle est le *paramètre* de la géométrie non euclidienne (que je proposerais d'appeler *pseudosphérique*), et c'est *seulement par des mesures* prises dans l'espace objectif que l'on peut reconnaître que la valeur particulière de la courbure de celui-ci est *zéro*, c'est-à-dire qu'on a pour cet espace $R = \infty$; de même que c'est *seulement par des mesures* que l'on peut assigner la courbure d'une sphère donnée, laquelle est le *paramètre* de la géométrie sphérique.

Effectivement, on peut vérifier que la théorie de Lobatchefsky coïncide, sauf les dénominations, avec la géométrie de l'espace à trois dimensions de courbure constante négative. Ceux qui désireraient voir le développement de cette correspondance en pourront trouver ailleurs une exposition plus détaillée (*). Ici, pour ne pas faire une trop longue digression, je me bornerai à quelques indications sommaires.

(*) Voyez le Mémoire précédent (*Essai d'une interprétation de la Géométrie non euclidienne*), où les particularités développées pour le cas de deux dimensions peuvent aisément se répéter pour celui de trois dimensions, surtout si l'on tient compte du présent écrit, et si l'on a recours à une sphère auxiliaire.

La planimétrie non euclidienne n'est autre chose que la géométrie des surfaces de courbure constante négative. Les circonférences de cette planimétrie correspondent aux lignes qui coupent orthogonalement tous les rayons géodésiques issus d'un même point de la surface, ou aux circonférences géodésiques. Le périmètre y est donné en fonction du rayon géodésique r par la formule

$$\pi R \left(e^{\frac{r}{R}} - e^{-\frac{r}{R}} \right),$$

comme Gauss l'avait déjà énoncé. Par trois points de la surface, on ne peut pas toujours faire passer une circonférence géodésique ayant son centre en un point réel. Les *horicycles* ou *courbes-limites* de Lobatchefsky ne sont autre chose que les circonférences géodésiques dont le centre est à l'infini, c'est-à-dire dont les rayons forment un système de lignes géodésiques parallèles. En faisant, dans l'équation (21'), $n = 2$, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + h'' e^{-\frac{\rho}{R}} d\eta^2,$$

expression de l'élément linéaire de la surface de courbure constante négative, rapportée à un système d'horicycles concentriques et à leurs rayons. La forme de cette expression montre que, moyennant une flexion convenable de la surface, les horicycles peuvent devenir les parallèles de la surface de révolution dont le méridien est la courbe des tangentes de longueur constante $= R$.

La stéréométrie non euclidienne n'est autre chose que la géométrie des espaces à trois dimensions de courbure constante négative. Nous avons déjà dit à quoi correspondent, dans cette géométrie, les droites et les plans. Aux surfaces sphériques correspondent les surfaces qui coupent orthogonalement tous les rayons géodésiques issus d'un même point, c'est-à-dire les sphères géodésiques. Là aussi il peut se faire que par trois points, et à plus forte raison par quatre, on ne puisse pas faire passer une sphère géodésique ayant son centre en un point réel. Les *horisphères* ou *surfaces-limites* de Lobatchefsky (*) ne sont autre chose que les sphères géodésiques dont le centre est à l'infini, c'est-à-dire

(*) Ou les surfaces F de J. Bolzai.

dont les rayons forment un système de lignes géodésiques parallèles de l'espace de courbure constante négative. En faisant, dans l'équation (21), $n = 3$, il vient

$$(25) \quad ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + d\eta_2^2}}{\eta},$$

où l'on a

$$\frac{Rx}{a-x_3} = \eta, \quad \frac{Rx_1}{a-x_3} = \eta_1, \quad \frac{Rx_2}{a-x_3} = \eta_2,$$

et réciproquement

$$x_1 = \frac{2aR\eta_1}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}, \quad x_2 = \frac{2aR\eta_2}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}, \quad x_3 = \frac{a(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - R^2)}{\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + R^2}.$$

La formule (25) représente l'élément linéaire de l'espace non euclidien rapporté à un système d'horisphères concentriques et au système de leurs rayons. La forme de cet élément montre que toute horisphère, étant représentée par $\eta = \text{const.}$, est une surface de courbure *nulle* (c'est-à-dire superposable au plan euclidien par voie de simple flexion sans extension), puisque son élément linéaire est de la forme

$$ds = \text{const.} \times \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2};$$

et que les variables η_1, η_2 sont les coordonnées *cartésiennes rectangulaires* de ses points. Une surface du premier ordre,

$$lx_1 + mx_2 + nx_3 + p = 0,$$

est représentée, au moyen des coordonnées η, η_1, η_2 , par l'équation

$$2aR(l\eta_1 + m\eta_2) + (an + p)(\eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) = (an - p)R^2,$$

et, par suite, elle coupe l'horisphère (pour laquelle $\eta = \text{const.}$) suivant une ligne qui devient un cercle dans le développement plan de cette surface. Celui-ci se réduit à une droite seulement, lorsque $p = -an$, c'est-à-dire quand l'équation de la surface du premier ordre est de la forme

$$lx_1 + mx_2 + n(x_3 - a) = 0,$$

ce qui arrive lorsqu'elle est une surface diamétrale de l'horisphère, ou

qu'elle passe par le centre (à l'infini) de cette horisphère. Dans ce cas, la ligne d'intersection est évidemment un horicycle de cette surface diamétrale, tandis que, par rapport à l'horisphère, elle est telle qu'elle se convertit en une droite quand l'horisphère est étendue sur un plan. De là résulte que le triangle tracé sur une horisphère par trois surfaces diamétrales est au fond un triangle géodésique situé sur une surface de courbure nulle; par conséquent, il satisfait à toutes les relations de la trigonométrie plane ordinaire, puisqu'il est également applicable sur un triangle rectiligne.

Ainsi toutes les conceptions de la géométrie non euclidienne trouvent une correspondance parfaite dans la géométrie de l'espace de courbure constante négative. Il faut seulement observer que, tandis que les conceptions de la planimétrie reçoivent une interprétation vraie et propre, puisqu'elles sont *constructibles* sur une surface *réelle*, celles, au contraire, qui embrassent trois dimensions ne sont susceptibles que d'une représentation analytique, puisque l'espace dans lequel une telle représentation pourrait se réaliser est différent de celui auquel on applique généralement le nom d'*espace*. Du moins, l'expérience ne semble pouvoir être mise d'accord avec les résultats de cette géométrie plus générale, que si l'on suppose la constante R infiniment grande, c'est-à-dire la courbure de l'espace nulle; ce qui pourrait toutefois n'être dû qu'à la petitesse des triangles que nous pouvons mesurer, ou à la petitesse de la portion d'espace à laquelle s'étendent nos observations, de même que cela arrive pour les mesures prises sur une petite portion de la surface terrestre, et dont la précision ne suffit pas pour mettre en évidence la sphéricité du globe.

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que des espaces de n dimensions dont la courbure est constante, mais *négative*; la raison en est que nous avons principalement en vue le rapprochement des conceptions qui s'y rapportent avec celles de la géométrie non euclidienne, relativement à laquelle l'hypothèse opposée offre moins d'intérêt. Néanmoins nous en dirons ici quelques mots.

L'élément linéaire

$$(26) \quad ds = R \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx^2}}{x},$$

dans lequel

$$x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

appartient à un espace de n dimensions dont la courbure est partout constante et $= \frac{1}{R^2}$. Cet élément se tire de (1), en changeant R, a, x en $R\sqrt{-1}, a\sqrt{-1}, x\sqrt{-1}$, et toutes les propriétés et les équations fondées sur de pures transformations analytiques de l'élément (1) subsistent évidemment, avec les changements indiqués, pour cet autre élément. Par exemple, la formule (8) se change dans la suivante :

$$(27) \quad \cos \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)(a^2 + x_1^{0^2} + \dots + x_n^{0^2})}},$$

formule qui donne pour ρ une valeur réelle, quelles que soient les valeurs réelles de $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Il est clair que, pour ces espaces, le théorème de la superponibilité de deux portions d'espace quelconque subsiste intégralement.

Si, dans l'expression (26), on suppose réelles les variables x, x_1, \dots, x_n et les constantes R, a , les valeurs admissibles pour les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n n'ont aucune limite, et peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$. Pour toutes les valeurs réelles de ces coordonnées, l'espace est *continu et simplement connexe*, mais *non infini* (Riemann, III, § 2); car, si l'on fait dans (27)

$$x_1^0 = \lambda_1 \tau, \quad x_2^0 = \lambda_2 \tau, \dots, \quad x_n^0 = \lambda_n \tau,$$

avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$, on a, pour $\tau = \infty$,

$$\cos \frac{\rho}{R} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}},$$

formule qui donne pour ρ une valeur finie et déterminée. Les lignes géodésiques continuent à être représentées par des équations linéaires; mais, vu l'admissibilité des valeurs infinies pour les coordonnées, le principe que deux points déterminent sans ambiguïté une ligne géodésique *cesse d'être vrai sans restriction*. Soient, en effet,

$$x_1 = b_1 x_n + b'_1, \quad x_2 = b_2 x_n + b'_2, \dots$$

les équations d'une ligne géodésique. Tant que l'un au moins des points

par lesquels elle doit passer à ses coordonnées finies, les coefficients peuvent être tous déterminés sans ambiguïté; mais si les points ont tous les deux des coordonnées infinies, il faudra mettre les équations sous la forme

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b'_1}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n} = b_2 + \frac{b'_2}{x_n}, \dots,$$

et substituer aux premiers membres les valeurs-limites vers lesquelles ils convergent en ces deux points. Si ces limites sont égales entre elles, les valeurs des seconds coefficients restent indéterminées, et la ligne géodésique ne peut être unique et définie. Si les limites sont différentes, les coordonnées de la ligne géodésique sont infinies en tous ses points.

Les considérations qui nous ont conduits à l'équation (13) ne sont pas applicables aux espaces de courbure constante positive, puisqu'il n'y a pas dans ceux-ci de points à l'infini. Donc les figures représentées par cette équation n'ont pas de correspondantes dans ces nouveaux espaces, de même que les lignes géodésiques réciproquement *parallèles* n'en ont pas non plus.

On voit que la géométrie des espaces de courbure constante positive [que l'on peut appeler convenablement *géométrie sphérique* dans le sens le plus large, puisque, comme le montre l'équation (22), les triangles géodésiques y sont soumis aux lois de la trigonométrie sphérique] diffère très-notablement de la géométrie *pseudosphérique*, bien qu'elle admette en commun avec celle-ci l'existence des figures égales. Du reste, la géométrie pseudosphérique conduit spontanément à la considération des espaces de courbure positive. En effet, en posant, dans (26),

$$\frac{a}{x} = \gamma, \quad \frac{x_1}{x} = \gamma_1, \dots, \quad \frac{x_n}{x} = \gamma_n,$$

on trouve

$$ds = R \sqrt{d\gamma^2 + d\gamma_1^2 + \dots + d\gamma_n^2},$$

avec la condition

$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2 = 1,$$


résultat qui, mis en regard de l'équation (18), dans laquelle on ferait

$\rho = \text{const.}$, nous montre que les sphères géodésiques de rayon ρ , dans l'espace à n dimensions de courbure constante négative $-\frac{1}{R^2}$, sont des espaces à $n - 1$ dimensions de courbure constante positive

$$\left(\frac{1}{R \sinh \frac{\rho}{R}} \right)^2.$$

Donc la géométrie sphérique peut être regardée comme contenue dans la pseudosphérique.

Bologne, août 1868.



SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. DIDON,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

On connaît le rôle important que joue dans la théorie des fonctions de Laplace l'équation aux dérivées partielles de Legendre

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dz}{dx} \right] + \frac{d}{d\alpha} \left(x^2 \frac{dz}{d\alpha} \right) = 0,$$

qui admet pour solution l'expression $(1-2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$; mais je ne sais pas qu'on ait donné d'autres solutions de cette équation. On peut, cependant, en trouver facilement de très-générales de la manière suivante. Si l'on cherche à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(2) \quad z = R_0(x) + \alpha R_1(x) + \dots + \alpha^n R_n(x) + \dots,$$

on voit de suite que $R_n(x)$ doit vérifier l'équation différentielle

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dR_n(x)}{dx} \right] + n(n+1)R_n(x) = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$R_n(x) = C_n X_n(x) + C'_n Q_n(x),$$

C_n et C'_n étant des constantes quelconques, $X_n(x)$ la fonction X_n de

Legendre, et $Q_n(x)$ représentant l'expression $\int_{-1}^{+1} \frac{X_n(t) dt}{x-t}$; par conséquent, la quantité

$$(4) \quad z = \sum C_n \alpha^n X_n + \sum C'_n \alpha^n Q_n(x),$$

dans laquelle les sommations peuvent s'étendre de $n=0$ à $n=+\infty$, est une solution de l'équation (1). Cette quantité se réduit, dans le cas où les C sont tous égaux à 1, et où les C' sont nuls, à

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \omega,$$

et, dans le cas, au contraire, où les C' sont égaux et où les C sont nuls, elle se réduit, à un facteur constant près, à

$$(5) \quad \omega \log \frac{(x - \alpha)\omega + 1}{(x - \alpha)\omega - 1},$$

expression qui est la fonction génératrice des fonctions $Q_n(x)$. En effet, dans la dernière hypothèse, on a

$$\sum C'_n \alpha^n Q_n(x) = C' \int_{-1}^{+1} \frac{\sum \alpha^n X_n(t)}{x-t} dt = C' \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - 2\alpha t + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{x-t} dt,$$

et il suffit de calculer l'intégrale précédente pour retrouver l'expression (5) donnée plus haut. Mais on peut effectuer les deux sommations qui entrent dans l'expression (4) de z , même dans le cas où les C et les C' sont quelconques. Pour cela, on n'a qu'à employer la formule de Laplace

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi,$$

qui donne

$$\begin{aligned} \sum C_n \alpha^n X_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum C_n (\alpha x - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi \\ &= \int_0^\pi \varphi (\alpha x - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1}) d\varphi \end{aligned}$$

et

$$\Sigma C_n x^n Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \psi(\alpha t - \alpha \cos \varphi \sqrt{x^2-1}) d\varphi,$$

où les fonctions φ et ψ ne sont assujetties qu'à la condition que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ puissent se mettre sous la forme $A + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$.

On peut aussi chercher à satisfaire à l'équation (1) par l'expression

$$(6) \quad z = \frac{1}{\alpha} S_0(x) + \dots + \frac{1}{\alpha^{n+1}} S_n(x) + \dots;$$

on trouve alors que $S_n(x)$ doit vérifier l'équation différentielle (3), ce qui donne les nouvelles solutions

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\pi \chi \left(\frac{x - \cos \varphi \sqrt{x^2-1}}{\alpha} \right) d\varphi$$

et

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{x-t} \int_0^\pi \varpi \left(\frac{t - \cos \varphi \sqrt{t^2-1}}{\alpha} \right) d\varphi,$$

où χ et ϖ sont des fonctions arbitraires constituées comme les fonctions φ et ϖ de tout à l'heure.

Les formes (2) et (6) ne comprennent pas toutes les solutions de l'équation (1), par exemple, la solution suivante :

$$z = \log \alpha \sqrt{x^2-1}.$$

En terminant, je fais remarquer que l'on ramène facilement l'équation (1) à la forme type d'Ampère, en faisant le changement de variables suivant :

$$s = \alpha(x - \sqrt{x^2-1}), \quad t = \alpha(x + \sqrt{x^2-1});$$

l'équation (1) devient alors

$$2(t-s) \frac{d^2 z}{dt ds} - \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{ds} = 0$$

ou

$$\frac{d}{ds} \left[(t-s) \frac{dz}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[(s-t) \frac{dz}{ds} \right].$$

Enfin, on peut observer encore que l'équation (1) se déduit de l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

en posant

$$\frac{d^2u}{dx dx} = z.$$

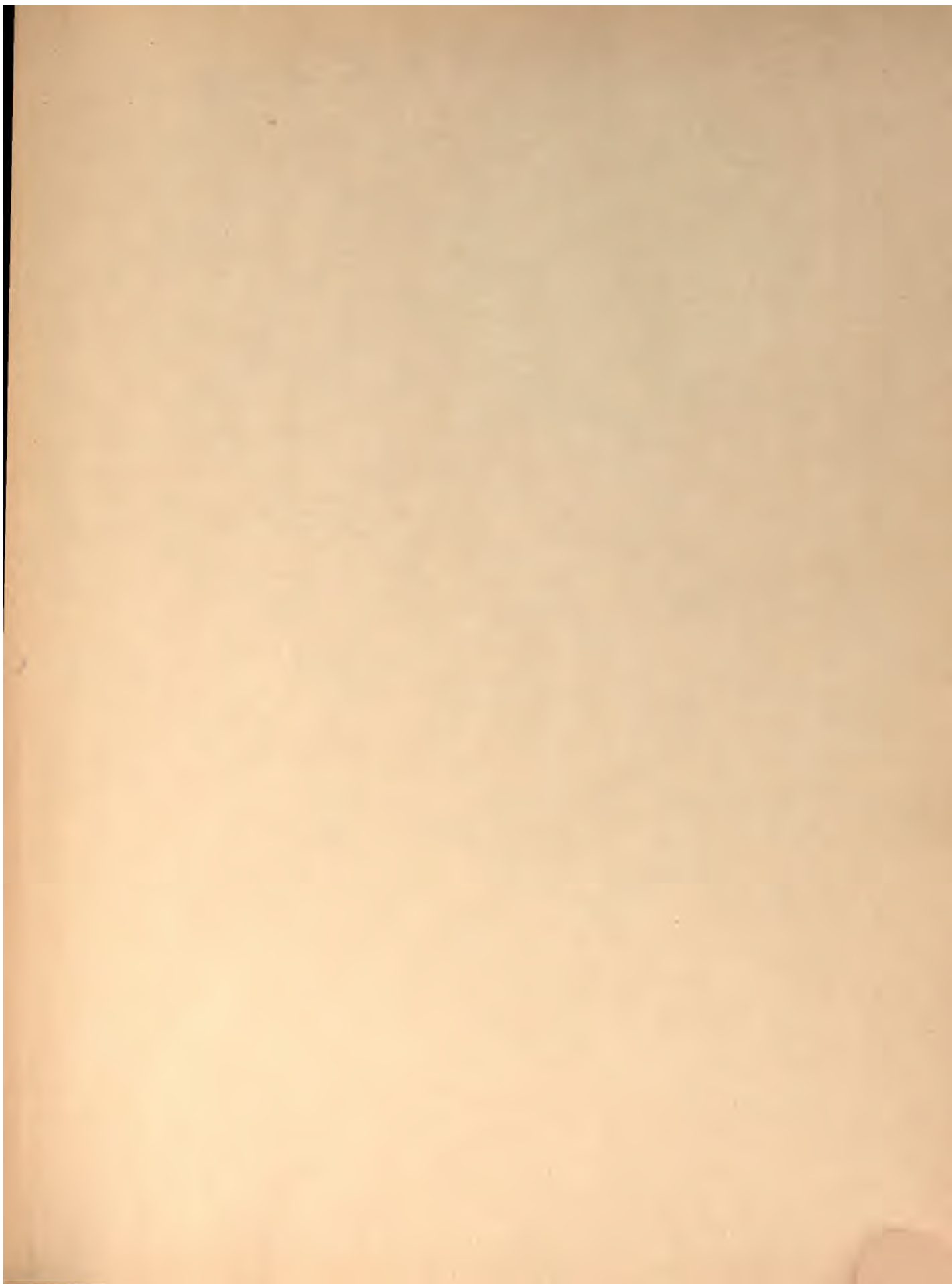
FIN DU TOME SIXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

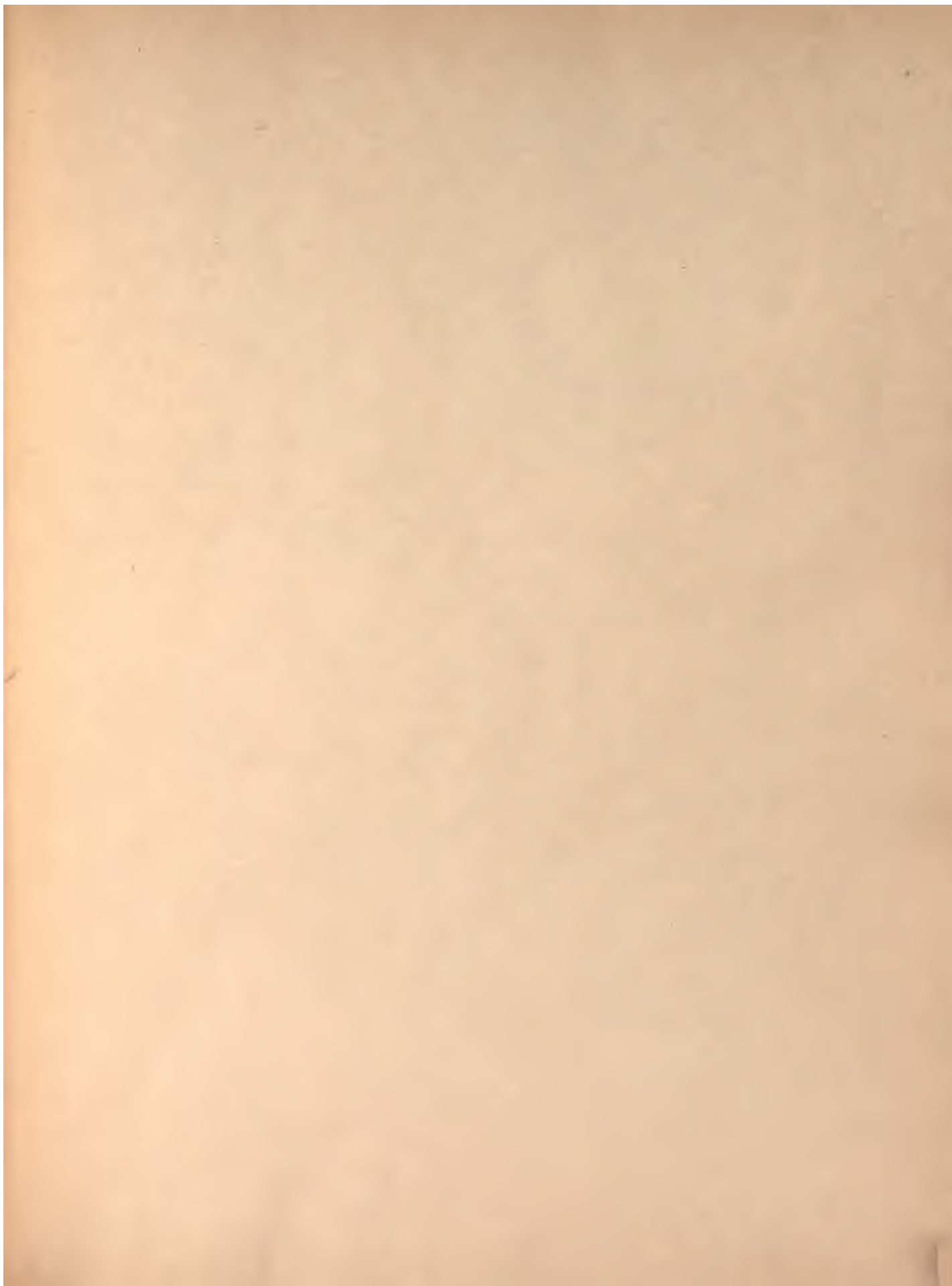
DU TOME SIXIÈME.

	Pages.
Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles, par M. <i>Didon</i> , Docteur ès Sciences.....	7
Recherches pour servir à l'histoire des Mucédinées. — Fermentation gallique, par M. <i>Ph. Van Tieghem</i> , Maître de conférences à l'École Normale.....	27
Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, par M. <i>G. Darboux</i> , ancien Élève de l'École Normale.....	61
Mémoire sur la rotation de la Lune (deuxième Mémoire), par M. <i>Ch. Simon</i> , Professeur au Lycée Louis-le-Grand.....	69
Recherches sur la respiration et l'asphyxie de la graine de vers à soie; par M. <i>E. Duclaux</i> , Professeur suppléant de Chimie à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.....	85
Sur certains systèmes de polynômes associés, par M. <i>Didon</i> , Docteur ès Sciences....	111
Lettres sur la théorie des Fonctions elliptiques, par <i>C.-G.-J. Jacobi</i>	127
Sur un problème de calcul intégral, par M. <i>J.-A. Serret</i> , Membre de l'Institut.....	177
Note sur les séries de termes positifs, par M. <i>Baillaud</i> , Élève de l'École Normale....	185
Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées, par M. l'abbé <i>Aoust</i>	205
Sur la rotation des corps solides, par M. <i>R. Radau</i>	233
Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne, par M. <i>E. Beltrami</i> , Professeur à l'Université de Bologne; traduit de l'italien, par M. <i>J. Houél</i>	251
Du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du Soleil, par M. <i>Bach</i> , Doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg.....	289
Théorie fondamentale des espaces de courbure constante, par M. <i>E. Beltrami</i> , Professeur à l'Université de Bologne; traduit de l'italien, par M. <i>J. Houél</i>	347
Sur une équation aux dérivées partielles, par M. <i>Didon</i> , Docteur ès Sciences.....	377

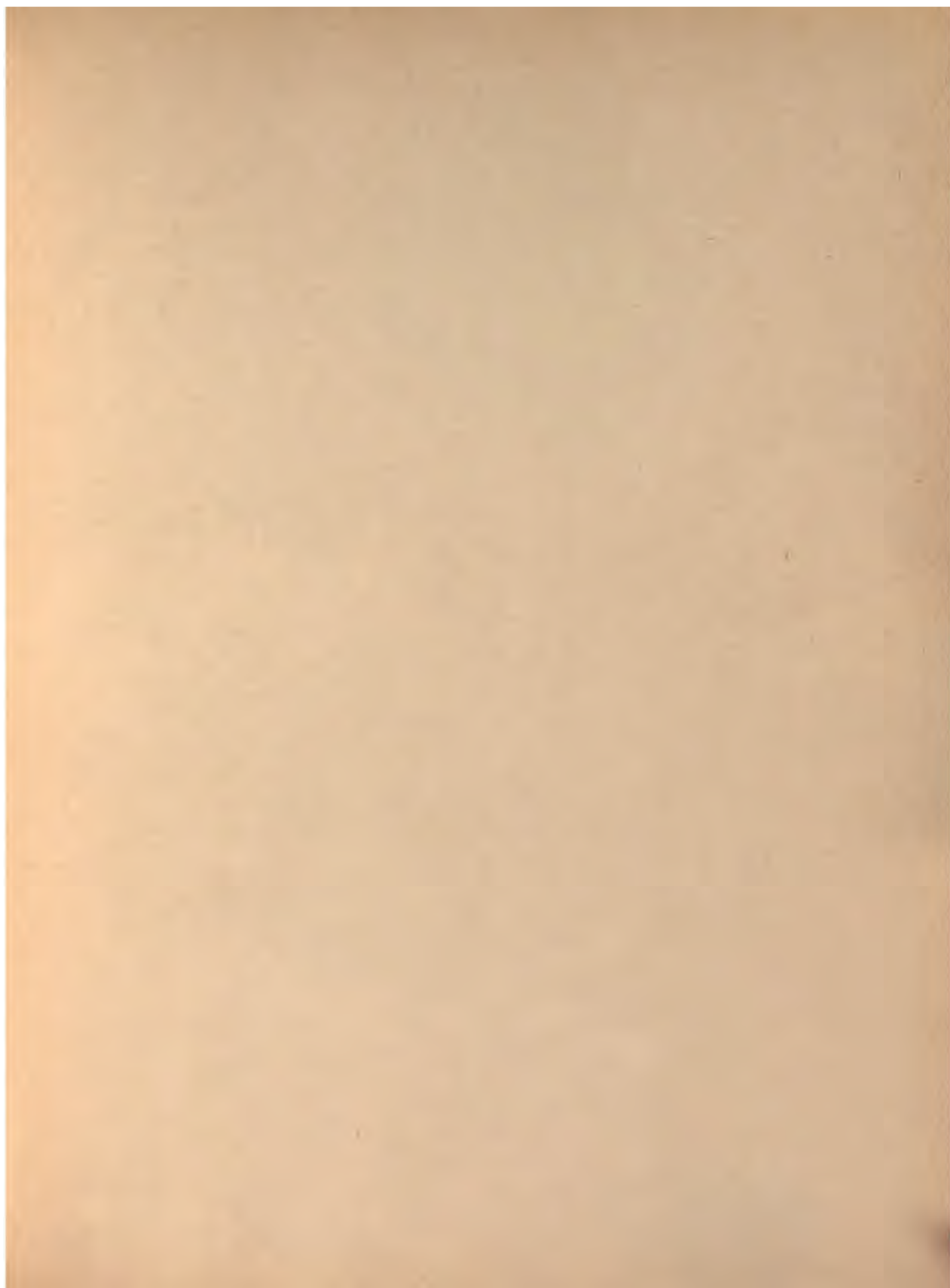
٢٤



✓
69









MAY 9 1938

